

論 説

利子率を組み入れたハロッド＝置塩投資関数
による景気循環モデル

——流動性のわなを伴う非線形的利子率決定の場合——

松 尾 匡

はじめに

ハロッド＝置塩型投資関数とは、マクロ経済が必ず不安定になる投資関数として、置塩信雄によって定式化された投資関数である。それは、資本蓄積率（資本ストックに対する設備投資の比率）の増分が、総需要の高低にしたがう変数である稼働率（または、産出・資本比率または利潤率または雇用・資本比率等々）の正常値との乖離の増加関数として決まるとする投資関数で、資本蓄積率の水準ではなく、増分が、このように決まるとしているところに、無条件のマクロ的不安定性をもたらす仕掛けがある。

置塩の存命中、彼とその弟子たちは、この投資関数を使った景気循環モデルを盛んに作っていた。この投資関数をもたらすマクロ的不均衡の累積は、投資決定の私的分散の形態という資本制の体制の本質のもたらすものととらえられたのだが、他方で資本制が持続的体制として維持されてきたことも事実である。それは、一方への不均衡の累積はやがて逆転され、他方への不均衡の累積によって相殺されることを繰り返してきたからだというのが、置塩の見解である。それが景気循環だというわけである。それゆえ、置塩とその弟子たちにとっては、どのような契機で景気循環が起こるのかを、ハロッド＝置塩型投資関数を組み込んだモデルで分析することが、大きな課題であった。

そうした際、利子率の運動が、不均衡の累積を逆転させて、景気循環を引き起こす契機になるのではないかという発想は、自然なことであろう。これを検討したのが、新里（1984）である。

新里（1984）は、ハロッド＝置塩型投資関数に利子率を組み入れ、IS-LMの枠組みとフィリップス曲線を使って、一定の条件のもとで景気循環が生じるモデルを構築したものである。ここでは、現実に観察される、景気循環に対する利子率の運動の遅行性が問題意識とされ、これをモデルで表すことに成功している。また、当時ケインジアンとマネタリストの想定の違いとして盛んに議論されていたとおり、貨幣需要の利子弾力性が大きく、投資の利子感応度が小さいと体系が不安定になり、貨幣需要の利子弾力性が小さく、投資の利子感応度が大きいと体系が安定になることも示されている。

さて、新里（1984）は、線形近似による定常解近傍の運動を分析している。しかし、長期不況

を経た今日、利子率の運動を通じた景気循環というときに関心が持たれるのは、利子率が低位で張り付く流動性のわなに陥ることで、不況が持続して回復しなくなる事態である。これを検討するためには、利子率が非線形的に決まる事態を想定しなければならない。したがって、線形近似による定常解近傍の運動だけではなく、大域的な運動も検討されなければならない。

ところが、新里 (1984) は、一定の率で貨幣供給量が成長し、また別の一定の率で労働供給が成長することを前提する。そのため体系が、ハロッド置塩型投資関数による資本蓄積率の運動に加えて、実質貨幣の運動と、資本あたりの労働供給量の運動を表す、三本の微分方程式に集約される。微分方程式が三本あると、運動を図示することで大域的運動を検討することが困難になる。また、リミットサイクルの存在を検討するためのポアンカレ・ベンディクソン定理は、運動が二次元の場合に限定されるので、使えなくなる。

そこで本稿では、ハロッド=置塩型投資関数に、流動性のわなを含む非線形の利子率決定を組み込み、その運動の大域的挙動を検討するために、微分方程式を二本にまで減らす工夫をする。それは、IS-LMの枠組みで貨幣供給を外生的に増やす想定をやめて、インフレ率に応じて中央銀行が利子率を決定する想定に変えることである。これは、貨幣外生論に対して批判的な、ポストケインジアンやMMTには比較的親和的な想定になる。筆者は両者の間に本質的な違いを認めないものであるが、今日では、主流派の一環であるニューケインジアンも、インフレや雇用に合わせた中央銀行の調整で利子率が決まる想定をモデルで使うことが普及しているので、大方にとってこちらのほうが違和感のない想定になっているだろう。

I モデル

体系は次のように記述される。

$$sr = g, \quad 0 < s < 1 \quad (1)$$

$$\pi = \phi(N/N^S), \quad \phi'(N/N^S) > 0, \quad \phi''(N/N^S) < 0 \quad (2)$$

$$n = N/K \quad (3)$$

$$n^S = N^S/K \quad (4)$$

$$n = n(r), \quad n'(r) > 0 \quad (5)$$

$$i = f(\pi), \quad f'(\pi) > 0, \quad f''(\pi) < 0 \cdots \pi > \pi_0$$

$$f(\pi) = \underline{i} \geq 0 \cdots \pi \leq \pi_0 \quad (6)$$

$$\dot{g} = \beta(r - i), \quad \beta > 0 \quad (7)$$

$$\dot{N}^S = vN^S \quad (8)$$

$$\dot{K} = gK \quad (9)$$

(1)は財市場の需給一致式である。 r は利潤率を、 g は資本蓄積率を表す。ここでは、労働者の完全消費が仮定されている。¹⁾ s は資本家貯蓄率である。これは、財の純生産量が消費と投資に一致するという式の両辺から、実質賃金総量、すなわち労働者消費量を引き、資本家消費を引いて、両辺を資本ストック量 K で割ったものである。

(2)は、いわゆるフィリップス曲線にあたるもので、労働市場の需給状態に合わせてインフレ率 π が決まるものである。ただし、 N は労働需要、 N^S は労働供給である。これは、直接に労働市場で決まるものは貨幣賃金率で、その変化率とインフレ率が正の相関にあると考えてもよい。

(3)(4)は記号の定義である。(3)は稼働状態を表しているとも言える。これらを使って(2)式は、

$$\pi = \phi(n/n^S) \tag{10}$$

と表記できる。

(5)は、雇用・資本比率が利潤率の増加関数であることを示す。これは、『蓄積論』の示すように稼働率が利潤率の増加関数で、その稼働率に比例して雇用・資本比率が決まっていると定式化してもよい。あるいは、 $y=y(n)$, $y'>0$, $y''<0$ なる生産関数を想定して、利潤率最大化問題を解き、 $r=y(n)-y'(n)n$ からこれを導いてもよい。

(6)は中央銀行の行動を示す関数である。すなわち、中央銀行はインフレ率が高まったら利子率を引き上げ、インフレ率が低下したら利子率を引き下げる。ただし、インフレが高まるごとに、利子率の引き上げの度合いは大きくなる一方で、低インフレ(デフレ)に対応して利子率を引き下げても限度があると考ええる。いわゆる「流動性のわな」である。これは、大方の現代的理解のように、利子率のゼロ制約によると考えてもよい。あるいはケインズのオリジナルな見方のように、人々の危険回避志向のために、利子率が正の下限をもっていると考えてもよい。

(7)はハロッド=置塩型投資関数に利子率を導入したものである。通常、同投資関数は稼働率と正常稼働率との差に反応して蓄積率を上下させる定式化がなされるが、 r と n と y が互いに一対一に増加関数関係にある以上は、稼働率と正常稼働率との差に反応することは、利潤率と、正常稼働のときの利潤率との差に反応することと等しい。他方、利子率と正常な利子率との差に、減少関数的に反応して蓄積率を上下させる定式化を導入し、簡単化のためにこの両効果を線形加法的に合わせることにする。その際、正常稼働に対応した利潤率と正常利子率の項は非本質的なので、引き合って消えるとみなし、(7)のような単純な定式化が得られる。

(8)は労働供給量が一定の成長率 v で成長することを示す。

(9)は資本ストックが資本蓄積率で成長することを示す。

II 微分方程式体系への集約と定常解

(6)に(10)を代入し、さらに(5)を代入すると、

$$i = f(\phi(n(r)/n^S)) \tag{11}$$

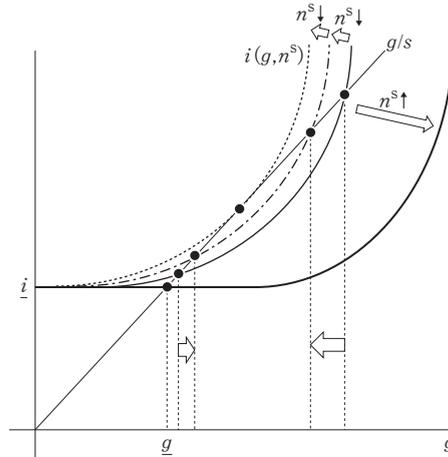
となる。これにさらに(1)を代入すると、(11)は、

$$i = i(g, n^S), \quad i_g > 0, \quad i_{n^S} < 0$$

となる。 n^S の成長率は、 $v-g$ となる。

ここから、運動は以下の二本に集約される。

図1 n^s をさまざまに与えたときの g 停止線上での g の導出



$$\dot{g} = \beta(g/s - i(g, n^s)) \tag{12}$$

$$\dot{n}^s = (v - g)n^s \tag{13}$$

この運動を g を縦軸に、 n^s を横軸にとった位相図に図示しよう。

(12)より g 停止線は、

$$g/s = i(g, n^s) \tag{14}$$

となるが、これは次のようにかける。上記図1のように、横軸に g をとると、(14)の左辺は、原点を通る傾き $1/s$ の直線となる。他方(14)の右辺は、(2)(6)の性質より、 g が、 n^s の増加関数である一定値以下のときに、ゼロ以上の最低値 i で水平となり、 g がそれより大きいときに傾きが遞増する右上がりの曲線となる。

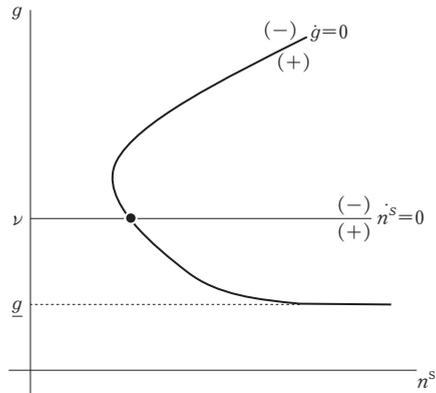
右辺のグラフが図の細実線のような位置にある場合、(14)を満たす解は二つ発生する。 n^s が低下すると、(14)右辺のグラフは、水平部分が縮小して残りが上にシフトする。よって、図1破線グラフのように、左辺グラフとの交点は接近する。さらに n^s が低下すると、右辺グラフは図1点線のようになり、左辺グラフと一点のみで接することになる。そしてそれよりも n^s が低下すると、両グラフの交点は消失する。

逆に n^s が増加すると、右辺グラフは右上がり部分が下にシフトし、水平部分が延長する。よって、両辺グラフの交点は n^s の増加につれて広がっていくが、小なるほうの交点の g 座標は一定値に収束する。この値を g としよう。図1より、利率の下限 i に対して、 $g = si$ となる。

よって、 g 停止線を g を縦軸に、 n^s を横軸にとった平面に図示すると、図2のような、下が $g = g$ の水平線に接続する「くの字」のグラフになる。このグラフより n^s が大きくなると、 i が減るので g は上昇運動をする。逆に、このグラフより n^s が小さくなると、 i が上がるので g は下降運動をする。

(14)を満たす $dn^s/dg = (1/s - i_g)/i_{n^s}$ なので、「くの字」が屈曲する点では、 $1/s = i_g$ となっている。 $i_{n^s} < 0$ なので、 $1/s > i_g$ となっているところは、 g 停止線が右下がり、 $1/s < i_g$ となっているとこ

図2 n^s と g の停止線と、定常解の存在



ろは、 g 停止線が右上がりになっている。

他方で、 n^s 停止線は、 $g=v$ となったときだから、位相図上では $g=v$ の水平線として表される。 g がこれよりも高いと n^s は下降運動をする。 g がこれよりも低いと n^s は上昇運動をする。

かくして両停止線を合わせると、図より明らかに、 $v > g$ であるかぎり唯一の定常解が存在する。 $v \leq g$ ならば、定常解は存在しない。両辺を s で割ると、これは、 n^s 停止線上における利率が i 以下になってしまうことを意味するので、 g は停止し得ない (下落し続ける)。

以下では、定常解の存在を前提する。定常解を示す記号には * をつけて表すことにすると、 $g^* = v$ である。 n^{s*} は、(14) の g に v を入れたときの解となる。図より明らかに、 v が高くして g 停止線が右上がりの部分に定常解があったならば、 v が上昇すると n^{s*} は増加する。逆に v が低くて g 停止線が右下がりの部分に定常解があったならば、 v が上昇すると n^{s*} は減少する。

III 局所安定性と運動

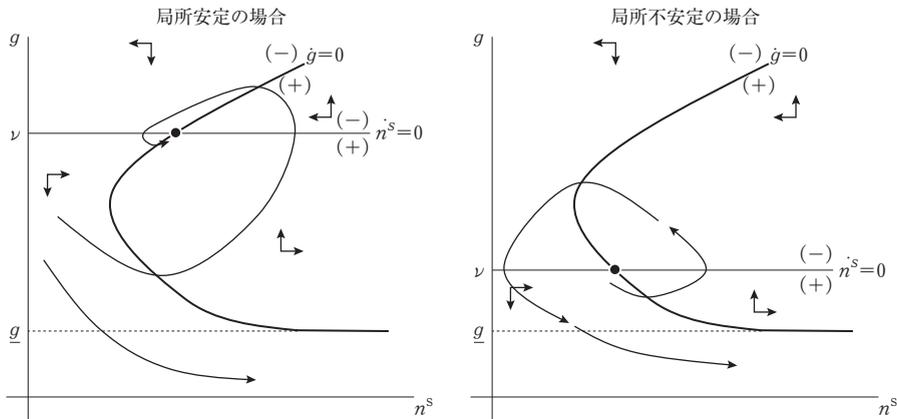
局所安定性を見るために、(12)(13) を定常解の近傍で線形近似してヤコビアン行列 J を求めると、

$$J = \begin{bmatrix} \beta \left(\frac{1}{s} - i_{g^*} \right) & -i_{n^{s^*}} \\ -n^{s^*} & 0 \end{bmatrix}$$

よって、 $\text{tr} J = \beta \left(\frac{1}{s} - i_{g^*} \right)$ 、 $\det J = -i_{n^{s^*}} n^{s^*} > 0$ となるので、安定条件のうちの行列式が正であることは満たすが、トレースが負であることはかならずしも満たされない。局所安定性が満たせない $1/s > i_{g^*}$ となっている場合は、 g 停止線が右下がりの部分に両停止線の交点があることになる。局所安定性が満たされる $1/s < i_{g^*}$ となっている場合は、 g 停止線が右上がりの部分に両停止線の交点があることになる。

かくして、局所安定なケースと局所不安定なケースの運動を図示すると、図3のようになる。運動は、景気循環とみなせる循環軌道を描くが、それは、 v が大きければ安定、小さければ不安

図3 微分方程式体系の運動



定になる。 v が自然成長率であるとみなせば、ハロッドの長期不安定性論の含意にそっている。

局所安定なケースであっても、図より明らかに、一旦 $g \leq g$ となった軌道は、 n^s が増加、 g が低下する領域から抜け出すことはできず、軌道は単調発散したまま戻ってくることはできない。雇用・資本比率 n は g の増加関数だったから、このことは失業率が拡大し続けることを意味する。すなわち、利子率が下限に達し不況が深化し続ける流動性のわなに陥っている。

IV 局所的なりミットサイクルの存在

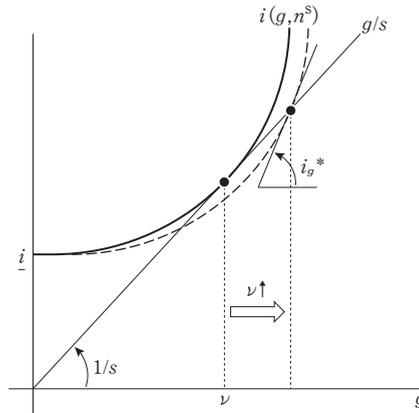
局所不安定なケースの場合は、やがて軌道の循環が拡大した結果、流動性のわなに落ちて戻ってこれなくなる。局所安定なケースについても、定常解を離れたところで同様のことになるかどうかを確認するために、不安定なりミットサイクルの存在を確認する。

g 停止点の「くの字」が屈曲する点で、 n^s 停止線である $g=v$ と交わっていた場合、定常解では、 $\text{tr}J=0$ 、 $\text{det}J=-i_n^* n^{s*} > 0$ なので、局所的な運動の特性根は、純虚根になる。

この点での図1で示された関係を改めて図4に示すと、 $i=i(g, n^s)$ を表す曲線グラフが、原点を通る傾き $1/s$ の直線と一点で接している点の g 座標が、 v になっている。ここで、 v が微小に上昇すると、 n^{s*} が増加して、 $i=i(g, n^s)$ を表す曲線が破線のようにシフトして、傾き $1/s$ の直線との二交点の上方の点の g 座標が v になるように定常解が決まる。すると、定常解における $i=i(g, n^s)$ 曲線の傾き i_g^* は、シフト前は $1/s$ だったのが、 $1/s$ よりも大きくなる。

すなわち、特性根が純虚根となる定常解において、 $\text{dtr}J/\text{dv} = -\beta di_g^*/\text{dv} < 0$ となってゼロとはならない。よって、この v の微小な増加によってホップ分岐が起こり、定常解の近傍にリミットサイクルが発生する。この場合の定常解は安定な定常解なので、リミットサイクルは不安定なリミットサイクルである。

図4 局所安定・不安定の境界上の定常解での v の変化による i_g^* の変化



V 大域的なりミットサイクルと不安定性

では大域的にはどうなるだろうか。 g 停止線の右上がりの領域で定常解が発生する、局所的安定なケースが前提になる。

利率が \bar{i} に到達した点がたまたま g 停止線上となる、図5のA点から出発すると、水平に g 停止線上を右に移動し、微小な摂動によって右上または右下に動いていくことになるが、A点よりも十分微小に左上の g 停止線上から出発して右上に動いた軌道を考えてみよう。

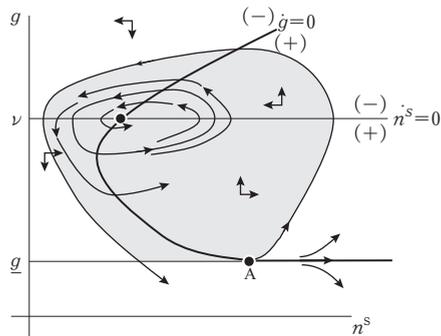
この軌道が一巡して元に戻ったならば、それがリミットサイクルである。

図5に示す軌道のように、この軌道が一巡した結果、元の軌道の外側に入った場合、右下に運動する領域で $g \leq \bar{g}$ となって、そのまま右下に発散する。この軌道を時間を逆にすると、運動は図に網がけした領域の内部にとどまり続ける。他方、定常解は時間を逆にまわせば局所不安定なので、運動が停止することはない。よって、ポアンカレ・ベンディクソンの定理により、安定なりミットサイクルが存在する。

よって、時間の流れを元に戻せば、不安定なりミットサイクルが存在することになる。このリミットサイクルの外側では、軌道は不安定になり、やがて流動性のわなに落ちて戻ってこれなくなる。

なお、A点近傍から出発する軌道が内側に回り込んだ場合は、A点に到達する軌道で区切られた内側の全域で定常点に向けて収束するものと予想されるが、現段階では複数のリミットサイクルが存在する可能性を排除できないので、そのように断定できない。この場合も、その領域の外にでると、やがて流動性のわなに陥って戻って来られなくなる。

図5 局所安定なケースの大域的不安定性



VI 利子率の運動の遅行性

最後に、新里 (1984) の問題意識であった、景気循環に対する利子率の運動の遅行性について確認しよう。

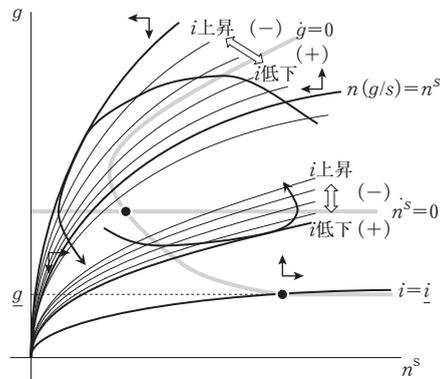
$g-n^s$ の位相図の平面に、さまざまな利子率にそれぞれ対応する等利子率線をかきこむ。(2)(6)式より、各々の利子率は、 n と n^s のいろいろな比率にそれぞれ対応している。 n と n^s の比率によってインフレ率が定まり、インフレ率によって利子率が定まるからである。²⁾

しかるに、(5)式に(1)式を代入すると $n=n(g/s)$ であるから、 $g-n^s$ 平面上に g と n の関係をグラフにかける。例えば、コブダグラス型の生産関数の場合は、利潤分配率が一定となるので、これを θ とすると、 $g=s\theta y(n)$ となるので、生産関数 $y=y(n)$ のグラフを縦に $s\theta$ 倍に縮小したものになる。これが、完全雇用時の利子率に対応する等利子率線である。他の等利子率線は、完全雇用等利子率線を、横に一定の比率で拡大、または縮小したものになる。右下ほど、低い利子率に対応したものになり、図5のA点を通るものが \bar{i} の等利子率線である。それよりも右下の領域はすべて \bar{i} に対応している。

すると、図6に示すように、等利子率線は右上がりなので、軌道が左下に運動する領域か、右上に運動する領域かのいずれかで、軌道と等利子率線は接する。すなわち、軌道が左上がりの領域で g が上昇していくにつれて、利子率も上昇していく。やがて g 停止線を越えた結果、 g が減少する領域に入っても、しばらくは利子率は上昇を続け、等利子率線と軌道が接したときをピークとして、それ以降、利子率は低下していく。軌道が右下がりの領域で g が下落していくにつれて、利子率も下落していく。やがて g 停止線を越えた結果、 g が上昇する領域に入っても、しばらくは利子率は下落を続け、等利子率線と軌道が接したときをボトムとして、それ以降、利子率は上昇していく。

よって、新里 (1984) が論証した利子運動の遅行性がここでも確認された。³⁾

図6 等利子率線で見るとの利子率の運動



おわりに

以上、ハロッド=置塩型投資関数に、流動性のわなを含む非線形の利子決定の影響を加味した景気循環モデルを検討した。その結果、一旦流動性のわなに陥ったら、モデルに組み込まれた金融政策では回復させることのできない不況の深化に陥ることが示された。また、労働人口成長率が低いと軌道は不安定になり、やがて流動性のわなに陥るが、労働人口成長率が高いと、局所的にはその高い成長率の定常解に収束すること、しかし、定常解からの乖離が大きいと、やはり軌道は不安定になり、いずれ流動性のわなに陥ることが示された。

また、新里 (1984) が分析したとおり、利子率の運動が蓄積率の運動に連行することも確かめられた。

今後の分析の発展方向としては、次のことが考えられる。

まず、中央銀行による利子率操作の定式化を、インフレ率に合わせて利子率を上下するものに改める方向がある。本稿の想定では、インフレ率にしたがって利子率自体が決まっているが、利子率の変化分を決めると考えるほうが現実的である。この場合、微分方程式は三本になるので、新里 (1984) そのものと比べて簡便さはなくなるが、同じ精神を新里 (1984) のモデルに取り入れると、貨幣供給増加率の変化分をインフレ率に応じて決める定式化になるので、こちらは式が四本になる。やはり本稿を拡張する方が簡便である。

また、期待インフレ率を組み込む方向も考えられる。本稿では、投資関数に入っているのは名目利子率であるが、これは、本来は実質利子率が入るべきものである。そうすると、流動性のわなで名目利子率が一定値になっても、期待インフレ率を操作できれば回復は可能になるかもしれない。すなわち、伝統的な金融政策を超えた、リフレ論的な政策の検討が展望される。この場合、人々の期待の形成や修正をどのように定式化するかが重要になろう。

あるいは、財政政策を組み入れ、金融政策との比較や、組み合わせを検討するという拡張も考えられる。さらに、期待インフレ率の操作に果たす財政政策の影響を考察することも考えられる。

注

- 1) 主流派経済学で一般的なように $sy=g$ と定式化しても事態は全く変わらないのだが、投資関数を簡潔に利潤率と利子率の差で定式化する関係上、本文中の定式化のほうが計算が直接的で簡便になる。
- 2) よって、以下の「等利子率線」は「等インフレ率線」と見てもよい。
- 3) 図6からは、 v が十分大きければ、労働市場の需要超過の領域で定常解が発生し、しかもそれが安定になることがわかる。逆に、 v が十分小さければ、定常解が不安定であるのみならず、それが実現しても労働市場は供給超過の領域にあることがわかる。やはり、自然成長率が高ければ加熱傾向になり、それが低ければ停滞傾向になるというハロッドの長期不安定性論と整合している。

参考文献

- 新里泰孝（1984）「景気循環過程における蓄積率、雇用率および利子率の運動」『富大経済論集』30(2), 212-231, 富山大学経済学部・富山大学経営短期大学部