研究ノート

下方からの景気反転の理解に向けて

――幾何ハロッド・置塩型投資関数による確率過程モデルの一試案――

松　尾　　　匡
西　郷　甲矢人

は じ め に

「ハロッド・置塩型投資関数」とは，置塩信雄が，マクロ的な振る舞いが必ず不安定になる投資関数として定式化したものである。1970年代から80年代ぐらいには，置塩とその弟子たちによって，この投資関数を用いた景気循環モデルの分析が盛んに行われていた。

その後，この投資関数を用いた研究はほとんど見かけなくなった。ミクロ的基礎づけが不明確であることなど，その理由はいくつか考えられるが，私見では，この投資関数を用いたモデルでは，下方から上方への景気の反転を起こすのが困難で，かなりアドホックな定式化を必要とする場合が多いこともそのひとつと考えられる。

しかし，政策介入や対外貿易の影響なしには，上方あるいは下方に一方的に景気が進むのが資本主義経済の本質であるとするハロッド・置塩モデルの含意は，むしろ今日のほうが現実性を増していると思われる。だから，そうした不均衡的本質を持ちながら，なお資本主義経済が自律反転して持続するメカニズムは何かを明らかにすることは，今もなおこのシステムの持続条件が衰退なく続いているのかを検討するためにも重要である。

それゆえこのノートでは，ハロッド・置塩モデルの本質を保ちながら，下方からの景気の反転が自律的に起こるような投資関数の定式化を試みる。以下で詳述する通り，このためには金融工学等でしばしば用いられる幾何ブラウン運動に類似した確率的な定式化が鍵となる。その際，議論の整合性のためには，資本家の設備投資態度は，景気が落ち込むほど，期待値としては低下するものとしなければならないが，そのゆらぎの大きさが拡大すると定式化することで，所望の性質が得られることがシミュレーションにおいて示された。

1：ハロッド・置塩型投資関数とマクロ的不均衡累積

投資は景気循環を主導する。ケインズは，所得の増大に消費の増大が及ばないために生じる貯蓄を投資が自動的に吸収するのではなく，投資が先決してそれに等しくなるようにあとから貯蓄

が決まることを指摘した。したがって，投資が過少ならば，貯蓄もまた過少となるように，所得＝生産が少なくなり，投資が過大ならば，貯蓄もまた過大となるように，生産＝所得が大きくなる。

それゆえこの投資の決まり方示す投資関数にどのようなものを想定するかが，資本制経済の安定性，不安定性についての論者の見解を表すキーとなる。例えば，利子感応度の高い投資関数を採用するマクロ経済モデルは，一般に完全雇用均衡解への収束を示すことが多い。貯蓄過剰が利子率の低下を通じた投資の増大で解消されるからである。

それに対して，置塩信雄が定式化した「ハロッド・置塩型投資関数[1)]」は，マクロ的振る舞いが必ず不安定になる投資関数として知られていた。これは以下のように定義される：

$$g(t+1)=g(t)+\beta(\delta(t)-1) \tag{1}$$

ここで，$g(t)$ はｔ期の資本蓄積率，すなわち，ｔ期の投資の資本ストックに対する比率を表し，$\delta(t)$ は稼働率，すなわち，資本ストックを正常に稼働した場合と比べた現実の生産の比率を表す。現実の生産が資本ストックを正常に稼働した場合の生産と一致していたならば，$\delta=1$ となる。

β は正であり，これは，生産が正常稼働を超えた場合は，その程度に比例して，次期の投資を今期の投資よりも拡大させ，生産が正常稼働に満たなかった場合は，その程度に比例して，次期の投資を今期の投資よりも減少させることを意味する。ここで，投資は同一の市場環境に対して資本ストックの単位あたりで決まるものとしているが，これは同規模の工場二棟が同一の資本家に所有されている場合と，二人の別々の資本家に所有されている場合とで，同一の市場環境に直面して，後者の場合が前者の場合よりも投資が二倍になるのは不合理であるからである。

このモデルが想定しているのは，需要の制約のもとで生産する資本家が，正常稼働よりも高い生産をした場合は，需要の成長に対して資本ストックが不足していると考えてその増加を高め，正常稼働よりも低い生産をした場合は，需要の成長に対して資本ストックが過剰であると考えてその増加を減らす判断をするということである。その意味でこれは，各資本家が他者の決定に関与しあわず，孤立分散的に決定するかぎり，合理的な投資決定をしていることを意味する。

ところがこの決定が経済全体で合成された場合どうなるだろうか。マクロ財市場均衡式が最も単純な周知の次式で表されたとしよう。

$$Y=C+I \tag{2}$$

ここで，Y は実質国内総生産，すなわち最終生産物の集計量で，実質総所得に等しい。C は実質消費，I は実質投資の総量を表す。C は最も単純に所得 Y の一定割合と考えると，Y から C を引いた残余，すなわち貯蓄は，所得 Y の一定割合となる。この割合を貯蓄率 s とすると，$0<s<1$ である。よって貯蓄は sY と書ける。

また，資本ストック１単位を正常に稼働すると σ の生産がなされるとすると，K 単位の資本ストックを正常に稼働した生産水準はσK となり，現実の生産水準は，これに稼働率 δ をかけたものになる。すると，上記財市場均衡式(2)の両辺から C を引き両辺を K で割ると，

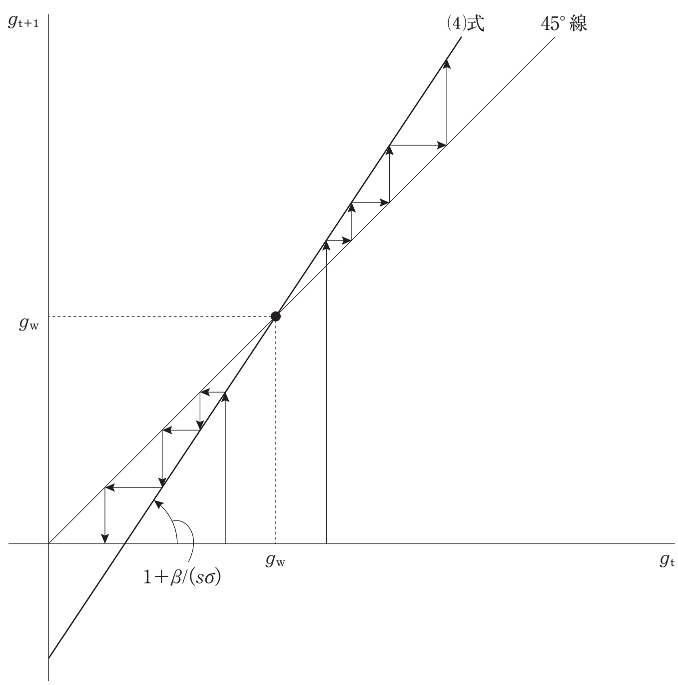
$$s\delta\sigma=g \tag{3}$$

となる。ここで定義より $g=I/K$ である。

ここから，総需要に合わせて財市場を均衡させる稼働率 $\delta(t)$ は，その期の資本蓄積率 $g(t)$ によって，$\delta(t)=g(t)/(s\sigma)$ と決まることになる。これを上記のハロッド・置塩型投資関数に代入すると，資本蓄積率 $g(t)$ の運動が下記の差分方程式によって与えられる。

$$g(t+1)=[1+\beta/(s\sigma)]g(t)-\beta \tag{4}$$

この差分方程式の運動は，下記の位相図で表される。



この定常解は，稼働率が１となる成長率 $g=s\sigma$ である。これはハロッドが「保証成長率」と呼んだもので，ハロッドにならってこれを g_w と書くことにする（当然 $g=\delta g_w$ である）。一見して明らかに，初期時点でたまたま定常解をとればそれが持続するが，定常解を一旦外れると一方的に発散する運動をする。

これは，一旦好況過程に入るとそれが一方的に加熱していき，逆に一旦不況過程に入ると景気の下落が累積することを示す。置塩は，この投資関数が個別資本にとって現実の需要に合わせた資本の過不足を解消する方向に投資を増減させるという意味で合理性を持っているにもかかわらず，その行動が経済全体で合成されると，不均衡を一方的に累積させるものであるという点で，生産，投資決定が私的分散的になされる資本制経済の原理的な不安定性を示すものととらえた。

２：ハロッド・置塩モデルで下方からの景気反転は説明できるか？

しかし，好況期に上方への不均衡の累積がとめどなく進行しても，不況期に下方への不均衡の

累積がとめどなく進行しても，いずれも資本制的再生産は持続せず破綻することになる。これは，資本制経済がこれまで数世紀にわたって持続してきたことに矛盾する。現実には，上方への不均衡累積は何らかの要因でどこかで下方への累積に転じ，下方への累積はまた何かの要因でどこかで上方への累積に転じて，この両フェーズを繰り返すという景気循環をすることを通じて，資本制経済は長期的に持続してきた。

このうち，上方への累積については，他にどんな要因が働かなくとも，最終的には労働の完全雇用に達することによって停止され，下方に転じる契機が経済には内在していると言える[2)]。

しかし，下方への累積については，それを反転させる契機がそれほど自明ではない。容易に思いつく契機としては，政府支出や輸出の増加によるものがあげられようが，それは資本主義経済に内在するものとは言えない。資本主義経済が自律的な再生産メカニズムを持つと言えるならば，これらの外在的契機なしにも，何らかの自動回復の仕組みを内在していると言えなければならない。

置塩は，『蓄積論[3)]』や弟子たちとの共著の『景気循環[4)]』で，他のいかなる要因が働かなくても，究極には資本家階級の基礎消費が景気の底を支えることで反転に向かうことを論じた。しかし，資本家の基礎消費とそこから波及する消費だけが最終需要である状態は，現実には見られない大不況であり，その需要のもとで稼働率が正常稼働を超えるまで資本減耗が進行しないと反転がないならば，そのような大不況がかなりの長期にわたって続くことになる。

そうすると，上方への累積を反転させる完全雇用の生産水準は，労働力人口が成長するかぎり，景気循環を経るたびに高くなるので，そこから，資本家の基礎消費に支えられる底までの落ち込みは，景気循環を経るごとに深くなる。すなわち，景気循環を経るごとに，不況の底での失業率はとめどなく高くなっていく。しかも，上方で反転する完全雇用の生産水準が高くなると，そのかんに蓄積される資本ストックが多くなる。よって，一定の資本家の基礎消費に支えられた底においては，下方における反転に必要な正常稼働に至るまでの資本減耗にかかる時間は，景気循環を経るごとに長くなっていく。景気循環を経るごとに，ますます多くの労働者がますます長い期間失業を余儀なくされるならば，いずれ資本制的生産関係は破綻することになろう。

現実には，不況克服のためのケインズ政策がなされる以前の時代にも，景気循環を経るごとに不況の底までの落ち込みが深くなっていくという事実はなかったし，そもそも，資本家の基礎消費とそこから波及する消費だけが最終需要となるほどまでの不況に至ったこともなかった。

よって，資本制的生産関係が長期にわたって自律的に再生産可能であるのならば，資本家の基礎消費によって支えられる底に至る前に，下方への累積を上方への累積に反転させる契機が内在されているはずである。

誰もが自然に思いつくだろうことは，不況が進行して利潤が圧迫されると，その状況からの脱却のために技術革新などのイノベーションの投資が起こってきて，それによる需要拡大から景気の反転がもたらされるとする，シュンペーター的説明である。

実は置塩は，あまり知られていないことであるが，『蓄積論』の初版[5)]（277–279ページ）において，労働生産性を上昇させる新技術導入のための投資需要が景気の下方からの反転をもたらすとの叙述をしていた。しかし，この説明は第２版では削除されている。

その理由はわからない。しかしよく考えてみればこの論理に疑問はある。ここでは，実質賃金

率の上昇（貨幣賃金率に比した販売価格の下落）によって生産性の低い資本は正の利潤を出せなくなり，生産性の高い資本も利潤が圧迫されるので，より生産性の高い新技術の導入によって利潤を回復することが強制されるとされている。だが，実質賃金率が高まったもとでも相対的に高い利潤率が得られるような革新的新技術は，実質賃金率がまだ相対的に低かったもとではもっと高い利潤率を産むはずなので，すでにその新技術は不況が進行する以前から導入されたはずである。[6)] 不況が進行して実質賃金率が上昇すると，旧技術のもとでの利潤率も低下するが，新技術のもとでの利潤率も低下するので，前者の投資が減るならば，後者の投資も減るはずである。

現実にも，イノベーション投資は，シュンペーターの議論とは逆に，景気が好いほど多く，景気が悪いほど少なくなるのが一般的な傾向である。

以上の検討を踏まえれば，ハロッド置塩モデルの枠組みにおいては下方での反転を説明することは困難と思われる。

３：確率性の導入

上記の『蓄積論』初版のような新技術の導入をともなう投資を考察するときに，通常思いつくのは，不確実性を導入することである。実質賃金率が低くて，旧来技術でも十分な利潤が得られる間は，より高い利潤が得られる可能性があったとしても不確実な新技術には手を出さないが，不況が進行して実質賃金率が高くなり，旧来技術にとどまっていては利潤が得られなくなるならば，たとえ不確実でも比較的高い利潤が得られる新技術導入に乗り出すという説明は，一見説得的である。

しかし実は，合理的に期待値計算をするかぎり，この推論は成り立たない。実質賃金率が高いときに，旧技術から得られる低い利潤よりも新技術の利潤の期待値が大きいならば，実質賃金率が低い時もまた，旧技術の利潤よりも新技術の利潤の期待値は大きいはずであり，やはりこの場合にも新技術が選ばれているはずである。

経済学でよく使われる，危険回避的な効用関数によって，期待効用を最大化するように選択するならば，ますますそうなる。まだ利潤が一般に高い水準にあるときに不確実な新技術が選ばれないならば，不況が深化して，実質賃金率が高まり，得られる利潤が一般に低くなるならば，不確実な選択はますますなされなくなる。

したがって，もしこの推論で，不況が深化することで新技術投資が起こることが言えるためには，危険愛好的な効用関数を前提しなければならない。しかし，それは今のモデルの議論と整合的ではない。

というのは，われわれは，不況が深化することで利子率が十分に下落し，それによって実物投資が起こってくるというルートを考慮しなかった。なぜならば，利子率が負値をとるならば――あるいは現実には十分に低い正値だったとしても――債券（貸付等々）よりも貨幣の方が有利になって，みな貨幣を持ってしまうからである。これは，不況が深化すると，危険資産である債券などよりも，安全な貨幣を持とうとする性質，いわゆる「流動性選好」が働くからである。

すなわち，われわれが貨幣の存在を前提して議論しているかぎり，危険回避的な効用関数を前

提していることになるし，それは不況期の人間行動の現実としてもあてはまっていると思われる。

よって，確率を導入するとしても，環境が確率的であるだけで，主体の側の行動が決定論的ならば，やはり下方からの反転を説明することは困難ということになる。

そういうわけで，主体の側が確率的に振る舞うことを想定することにする。主体の側が確率的に行動するのは，経済学で考えられるケースは，ゲーム理論の混合戦略である。景気が正常で，各個別資本にとって市場が十分に広いならば，各個別資本は自己の行動が市場に与える影響を無視し得るものと考え，市場で決まることを与件として最適に振る舞えばよい。しかし，不況が深化して市場が十分に狭くなると，各個別資本は自分の行動が与える影響を無視できなくなり，互いの意思決定が影響を与え合うことを考慮にいれなければならなくなる。このようなゲーム理論的状況においては，例えば，他者のアグレッシブな新投資決定に対してフォロワーになるか，他者がフォロワーになるもとでアグレッシブに新投資するかが決定論的に決まらなくなるケースが発生し得る。確率的な意思決定が現実的に想定困難ならば，さまざまな異質な意思決定態度が，生物進化的に模倣された結果，混合的な分布に落ち着くと考えてもよい。

この意思決定問題そのものを考察することは，重要なことであるが，後の研究の課題としたい。ここでは，そのような意思決定が行われた結果として，われわれのテーマであるハロッド＝置塩型投資関数が確率的になっていることを前提して，その場合のマクロ動学的振る舞いを検討することとする。上述のとおり，景気がよくなると投資関数は決定論的になっていき，景気が悪くなると確率的性質が大きくなる，すなわち，分散が拡大するような投資関数を立てるものとする。そうすると，上記検討したとおり，景気が悪くなると期待値としては投資が減っていくという合理的態度を前提しながらも，分散が拡大することで，たまたま十分に高い水準の投資が起こって，下方からの反転がなされることが説明できる。

4：幾何ハロッド置塩モデル

ここまで述べたことを，数学的にモデル化してみよう。つまり，好景気においては決定論的な通常のハロッド・置塩モデルに漸近しながら，景気が悪いときには確率的な揺らぎが大きくなるような確率的モデルを構成すればよい。そのために必要なことはまず，確率的な揺らぎの形はどのようなものであるべきかということを考えることである。典型的な確率現象（たとえばブラウン運動）のモデル化においては，揺らぎとしてはしばしば正規分布型のホワイトノイズが採用される。

しかし，我々のモデルにおいてはこれは適切ではない。第一に，正規分布は左右対称であるが，景気の落ち込み局面においては「負のほうにいくらでも」値をとるようなノイズは不適切である。なぜならハロッド＝置塩型投資関数は，資本ストックに対するその粗投資の比の運動を表わすものであるが，粗投資は負にはなり得ない。しかし，不況期で資本ストックに対する粗投資の比が十分小さい時，ノイズが負値で絶対値が大きくなると容易に粗投資が負になってしまう。

こうした現象のモデル化においてしばしば用いられるのは対数正規分布に従うノイズである。対数正規分布とは，「その対数をとると正規分布型となるような確率変数」の従う分布にほかな

らない。中心極限定理によって，「独立同分布な多数の確率変数の和」（を適切に正規化したもの）の従う分布は正規分布に近づいていく（弱収束の意味で）が，「独立同分布な多数の（正値）確率変数の積」の分布が近づいていくのがこの対数正規分布である。要するに，通常の正規分布型ホワイトノイズを「幾何化」（算術平均と幾何平均の関係の意味での「幾何」）したものをノイズとして考えるのである。

当然，対数正規分布型のノイズを採用することがが正値性を保証する唯一の選択肢ではない。より根本的には，次のような経済学的な正当化ができる。すなわち「成長率」ではなく，「いまの成長率に対する成長率の変動」が問題である，という局面を考えているとすれば，このようなノイズを考えることのより根本的な意味が説明できる。たとえばいまの日本では成長率の1パーセントの違いは大問題だが，急激な成長をしている国からすれば誤差の範囲であろう。この意味で，とくに成長率が小さい場合には，成長率そのものを扱うのではなく，現在の値との比が重要になると考えることは自然であろうと考えられる。そのようなモデル化が妥当だとすれば，いわば「dx から dx/x へと移行する」必要がある。言い換えれば，微分の代わりに「対数微分」を考える必要が出てくるのであり，これが「対数」正規分布型のノイズを考えることの意味といえる（もちろんこれはあくまで現象の「第一近似」として対数正規型のノイズを考えることの妥当性であり，実際の現象との乖離があるだろうことは当然であるが)。

そこで，幾何ハロッド置塩モデルを，以下のように定義しよう：

$$\ln g(t+1)=\ln g(t)+\beta(\delta(t)-1)+v\varepsilon \tag{5}$$

ただし，ε は平均０分散１の正規分布に従う確率変数であり，v は金融工学においてヴォラティリティと呼ばれるものに相当する量である。これは，正規分布型のノイズにおける「分散」に対応するものである。モデル化を完成するためには，この量が t や δ のどのような関数であるべきかを考える必要がある。しかし，前節において定性的に考察したとおり，v は十分に好景気の局面では小さくなっていくと考えられる。言い換えれば，決定論的なモデルに近接していくということである。一方，v が景気拡大に応じて単調に減少するかは議論を要するが，最終的には０に収束することから概ね単調と考えることが可能であると思われる。そこで，ここでは v が稼働率に対して単調減少であり，稼働率大の極限で０となるモデルを考えることにする。

一方，不況期においては v が大となるであろう。このことも，前節で定性的に議論したことから従う。

このような特性をもつ関数は当然いくらでもあるが，まずは近似的にもっとも簡単な関数として，「負の冪をもつ冪関数」を考えることにする。すなわち，

$$v=c\delta^{k},\ \ k<0 \tag{6}$$

というモデルを仮定する。この式と前述の(5)式，およびマクロ需給均衡式

$$s\delta\sigma=g \tag{3}$$

すなわち，$\delta g_w=g$ の三本の式によって，ひとつの確率的なモデルとしての「幾何ハロッド・置

塩モデル」が定義される。

この三本を集約すると，次の運動方程式が得られる。

$$\ln g(t+1)=\ln g(t)+\beta(g(t)/g_w-1)+c(g(t)/g_w)^k\varepsilon \tag{7}$$

以下，このモデルを用いたシミュレーションとそれについての観察を行う。

十分に $g(t)$ が大きくなると，最後の項はゼロに近づき，運動はより決定論的になる。近似的には $g(t+1)$ が $g(t)$ を指数関数に代入した形となり，極めて増大度が大きくなる（ただし，好景気に達するときには前提となる「幾何」性は背後に退くと考えられるため，永遠にこれが続くわけではないが)。

5：シミュレーションと観察

エクセルで，(7)式にしたがって，g の共通の初期値から出発した，ノイズの異なる五つの g の系列を50期まで走らせてみた。

シミュレーションにおいては，独立な［-1/2.，1/2］区間上の一様乱数（Excel の RAND(　) によって得られるもっとも簡単な，［0，1］区間上の一様乱数から 1/2 を引き去ったもの）を考え，それを100個足し合わせ，その平方根である10で割ることにより近似的に正規分布に従う確率変数を用いた。これが近似的に正規分布に従うことは，中心極限定理の帰結である（なお，このとき分散は 1/12 となり 1 ではないが，このずれは係数 c に押し付けることにすればよく本質的な違いはない)。

典型的な軌道のパターンがすべてそろった一例を以下に示す。

ただし，$\beta=0.1$，$g_w=0.05$，$k=-1.5$，$2\sqrt{3}c=0.301$ である。（$2\sqrt{3}$ は，上記ノイズの分散が1/12であるため，ε の分散を1にするように，12の平方根をかけているものである。）

系列1は，ほとんど落ち込まずに簡単に回復し，上方への発散軌道に入ったケースである。g があまり小さくならなくても，たまたま大きなプラスのノイズが続くことも低い確率であり得る。

系列2は，g が何度か低く落ち込んでノイズの分散が大きくなって回復するものの，g_w の値0.05付近にまで達するにはなかなか至らず，負のトレンドの影響を受けて下落しては，またノイズの分散が大きくなって回復することを繰り返したケースである。変動を繰り返すうちに，g が g_w を超え，最終的には上方への発散軌道に乗っている。

系列3は，おおむね一方的に下方に落ち込み，ほとんどゼロ近くまで落ち込んだケースである。この場合，ノイズの分散は極めて大きくなるので，図では示すことができないが，次の期には g はエクセルがオーバーフローするほどの大きな値にまでジャンプしている。

系列4は，g が下降しても，ノイズの分散が十分に大きくなるまで落ち込まない段階で，比較的小さな上昇をするために，g が g_w を超えることができず，また負のトレンドの影響を受けて下降することを繰り返すケースである。この計算結果では，おおむね0.02から0.04の範囲での上下が持続しているが，このままシミュレーションを続けたならば，どこかでは上方への発散軌道に入ると思われる。

系列5は，最初の下降局面でたまたま十分な上方への変動が起こり，g が g_w を超えて正のトレンドの局面に入ったものの，これもたまたま十分大きな負のノイズが発生して，また g が g_w を下回る負のトレンドの局面に入って下降することになったケースである。その後，g が十分に低くなってノイズの分散が大きくなった結果，最終的に大きな上方への変動が起こって，上方への発散軌道に乗っている。

おわりに：課題と展望

さて，われわれは，簡単な数値シミュレーションによって，幾何ハロッド・置塩投資関数モデルでは下方からの景気反転が起こることを示した。

これはまだ一般的な数学的証明にはなっていない。直感的には，g が閾値より下で下方トレンドを持ち続ける中，それがゼロに近づくほど，分散は無限に大きくなるのだから，十分な時間がたてばやがてどこかで反転に必要な上方ノイズは得られるだろうことは容易に推測できる。しかしそれを正確に定式化しようとすると確率論的な道具立てと議論が必要であり，多少の手間がかかるので，今後の課題としたい。その際，簡単のため分散（ヴォラティリティ）の項 v を負の冪をもつ冪関数として定式化した今回のモデルを拡張することも考えられる。

また，幾何ハロッド・置塩モデルの定式化の過程で議論した経済学的な根拠づけについても精密化する必要がある。とくに，ゲーム理論の混合戦略の議論と確率の導入，不況下における分散の項 v の増大などの議論は新規なものであり，より精密なモデル化や，数値シミュレーション，実際のデータとの比較検討などが必要であろう。その過程で，簡単のため冪関数として定式化した分散の項 v のより適切な関数型なども見えてくる可能性がある。

注

1）詳しくは，置塩（1977），特に第２章第２節（74ページから）や，置塩（1976）第３章，特に191ページからを参照のこと。
2）言葉による詳しい説明は置塩（1976）第３章第３節ｂ項，特に229-231ページを参照。数理モデルによる展開は，置塩（1988）第３章第１節または，置塩編著（1988）を参照のこと。
3）置塩（1976）245ページ。
4）置塩編著（1988）。
5）置塩（1967）。
6）ここでは，景気が回復して価格が元にもどっても不可逆な技術革新を念頭においている。

参考文献

置塩信雄（1967）『蓄積論』初版，筑摩書房。
置塩信雄（1976）『蓄積論』第２版，筑摩書房。
置塩信雄（1977）『現代経済学』筑摩書房。
置塩信雄（1988）『現代経済学Ⅱ』筑摩書房。
置塩信雄編著（1988）『景気循環―その理論と数値解析』大月書店。