論　説

ボラティリティについて

浅　井　　　学

１．はじめに

ファイナンスの分野には，リスクを測る尺度としてボラティリティと呼ばれるものがある。本稿では，まず20世紀後半におけるファイナンス理論の重要な発展を振り返り，ボラティリティの役割を確認する。次に，ボラティリティのモデル化・推定・予測方法を紹介し，最後に，ボラティリティ指数を応用した金融デリバティブの考え方を紹介する。

２．ファイナンスにおけるボラティリティの役割

この節では，ファイナンスにおけるボラティリティの役割を確認するために，リスク・リターン分析とオプション価格の評価方法を説明する。

２．１　リスクの選好と回避

時点 t における金融資産の価格を S_t とする。この金融資産のリターンは $R_t = \ln S_t - \ln S_{t-1}$ で与えられる。この収益率を確率変数とみなし，期待リターンと標準偏差をそれぞれ $\mu = E(R_t)$ と $\sigma = \sqrt{V(R_t)}$ で表記する。特に標準偏差 σ はボラティリティと呼ばれ，リスクを測る尺度となっている。

ここで無リスク資産の利回りを r とする。無リスク資産は，現時点で100万円を投資すれば，１年後に確実に $100(1+r)$ 万円になる資産である。無リスク資産は確実な収益をもたらすので，$\mu = r$ および $\sigma = 0$ となり，リスクはゼロとなることが確認できる。

金融資産のポートフォリオを組む際に，リターンだけでなくリスクにも目を向けるべきだと主張したのは Markowitz（1952）である。このアイデアを説明するために，ポートフォリオではなく，まず図１のような４つの資産について考える。図１では横軸はボラティリティで，縦軸は期待リターンを表している。資産 A と資産 B を比較すると，同じ期待リターンの資産であればリスクが小さいほうが好ましいので，資産 A が選択される。次に資産 A と資産 C を比較すると，同じリスクをとるのであれば期待リターンが高いほうが好ましいので，資産 C が選択される。

図１　リスク・リターン平面

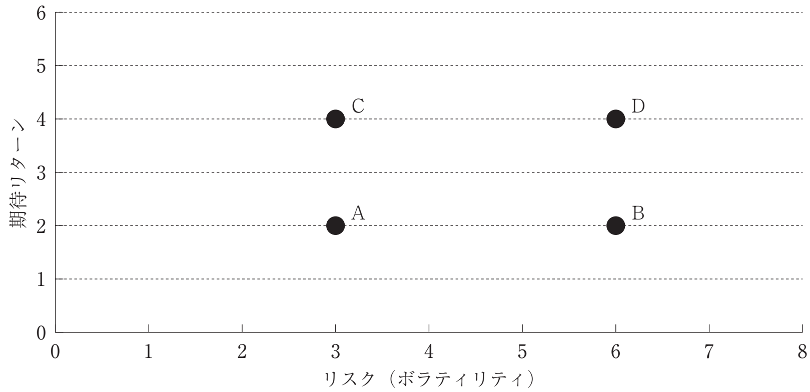
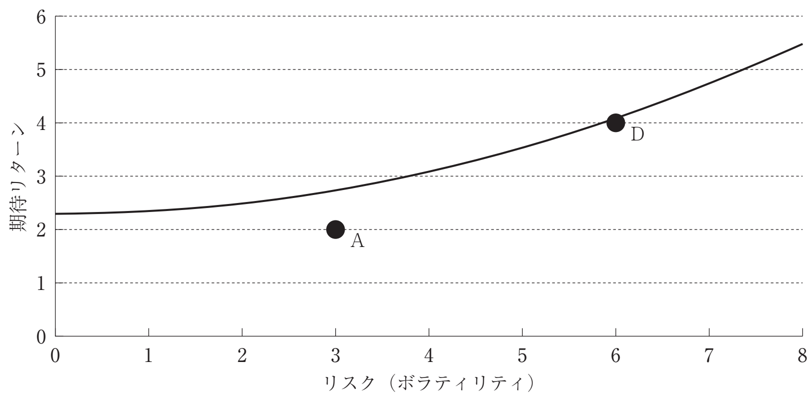


図２　無差別曲線

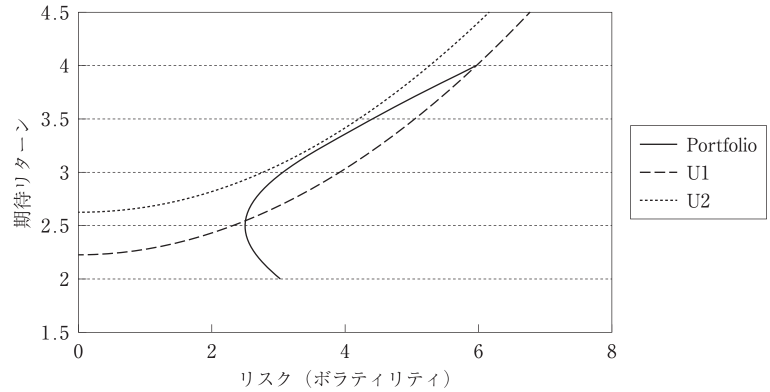


ここで，資産Ａと資産Ｄについては，どのような選択が望ましいのであろうか。資産Ａはローリスク・ローリターンの資産であり，資産Ｄはハイリスク・ハイリターンの資産である。この場合，投資家の効用関数を使って，図２のように効用が高いほうの資産を選ぶことになる。無差別曲線の形状は右上がりで，リスクが高いほど，より高いリターンを投資家は求めることになる。また同じリスクであれば，より高いリターンを求めることから，無差別曲線は左上に向かうほど，効用が高まると言える。図２のケースでは，この投資家は，ハイリスク・ハイリターンの点Ｄを選択している。

次にポートフォリオとして，資産Ａと資産Ｄの組み合わせを考えて，Markowitz（1952）のアプローチを説明する。資産Ａと資産Ｄの２つの収益率の相関係数 ρ について $|\rho|<1$ であるならば，投資機会は図３のような曲線で与えられる。ポートフォリオにおいて，資産Ａの占める割合が大きくなれば点Ａに近づき，資産Ｄの占める割合が大きくなれば点Ｄに近づく。図３から，点Ｄを通る無差別曲線 U1 よりも，資産Ａと資産Ｄを組み合わせたポートフォリオのほうが，より高い効用を実現できることがわかる。図３の U2 は投資機会曲線と接しているが，このように無差別曲線と投資機会曲線との接点が，最適ポートフォリオとなる。

以上のように Markowitz（1952）は，リターンだけを見ていた投資理論にリスク（ボラティリテ

図 3　ポートフォリオと無差別曲線



ィ）を持ち込んだ。このアイデアは，Tobin（1958）によって無リスク資産を含めたケースに拡張され，「トービンの分離定理」として知られるようになる。

2．2　オプション価格の評価とボラティリティ

オプション価格の評価方法の代表例として，Black and Scholes（1973）のヨーロピアン・コール・オプションの価格式を紹介し，ボラティリティの役割を確認する。ここで，ヨーロピアン・オプションとは，特定の時点（満期日）T において，（株など）原資産を，定められた価格（行使価格）K で，売買できる権利のことである。原資産を買う権利をコールといい，売る権利をプットと呼ぶ。

具体例として，図 4 のようなヨーロピアン・コール・オプションを考える。時点 t においてコールの買手は価格 C_t だけ支払って「株式 S を満期に価格 K で購入する権利」を取得後，金融資産の値上がりを期待しながら満期を待つ。コールの買手は，満期において株価 $S_T>K$ のときにだけ権利を行使する。その場合は，株を価格 K で取得後，ただちに市場価格 S_T で売却することによって S_T-K の利益が得られる。この金額から権利取得時に支払った C_t を差し引いた値が純損益となる。コールの買手は，株価が $S_T \leq K$ のときは権利を行使しない。この場合は，権利を行使すると損失が発生するためである。最終的に当初支払った C_t が損失額となる。コールの売り手の損益は，コールの買手の損益を上下対称にした形になっている。株価が高騰した場合には，コールの売り手は巨額の損失を被ることになる。

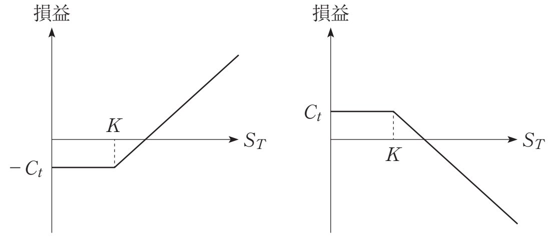
Black and Scholes（1973）は，コール・オプション価格 C_t の計算式を導出した。まず金融資産価格が幾何ブラウン運動に従うとする。

$$dS_t=\mu S_t dt+\sigma S_t dB_t$$

ただし，B_t は標準ブラウン運動過程である。このとき Ito の補題により，対数価格 $\ln S_t$ は Ito 過程

$$d\ln S_t=\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)dt+\sigma dB_t$$

図４　コールの損益



(a)コールの買手　(b)コールの売り手

に従う。このとき時点 t から満期 T までの期間の収益率は

$$\ln S_T - \ln S_t \sim N\left(\left[\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right]\tau,\ \sigma^2\tau\right)$$

となる。ただし，$\tau = T - t$ は残存期間を表す。また，無リスク資産の利子率を r とする。Black and Scholes（1973）は，金融資産価格が幾何ブラウン運動に従うという仮定のもとで，時点 t におけるヨーロピアン・コール・オプションの価格は

$$C_t = S_t\Phi(d) - K\exp(-r\tau)\Phi(d - \sigma\sqrt{\tau})$$

で与えられることを示した。ただし $\Phi(z)$ は標準正規分布の分布関数であり，$d = \dfrac{\ln(S_t/K) - (r + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$ である。したがって，時点 t における原資産価格，満期までの残存期間，行使価格，無リスク資産の金利，そしてボラティリティがわかればオプション価格を計算することができる。

ヨーロピアン・プット・オプションの価格は，プット・コール・パリティ $C_t - P_t + e^{-r\tau}K = S_t$ により，$P_t = K\exp(-r\tau)\Phi(-d + \sigma\sqrt{\tau}) - S_t\Phi(-d)$ で与えられる。

このように，ボラティリティは，株を始め，金融商品に用いられる資産価格の収益率の標準偏差を表している。またボラティリティは，資産の数量的なリスクを表し，その値が大きいほどリスクも大きい。本節では，ファイナンスにおけるボラティリティの有用性として，ポートフォリオのリスク・リターン分析とオプション価格の計算における役割を説明した。次の節では，さまざまなボラティリティの計測方法を紹介する。

３．ボラティリティの計測方法

ボラティリティを計測する方法として，最もシンプルものは「ヒストリカル・ボラティリティ」である。この方法は，文字通り過去の収益率のデータから計算する方法である。図５に示されているように，この節ではヒストリカル・ボラティリティから発展していったものとして，ファイナンスや時系列分析におけるボラティリティの計測方法を紹介する。いずれの分野でも，かつてはモデルベースのアプローチが主流であったが，近年ではモデルフリーのアプローチに移行

図５　ボラティリティの推定方法

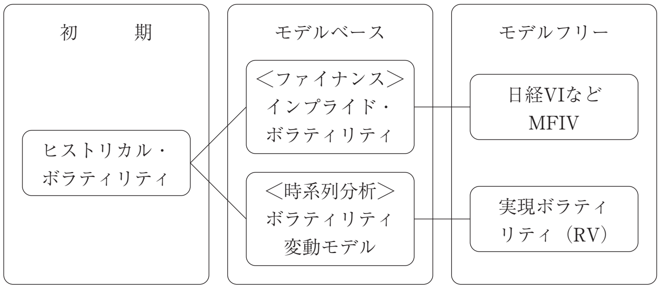


表１　日経225指数の日次データから計算したヒストリカル・ボラティリティ(2009年)

対象日数	5/22	6/19	7/17	8/21
10日間	0.2789	0.2420	0.2397	0.2360
20日間	0.3311	0.1922	0.2304	0.1954
60日間	0.3508	0.2926	0.2558	0.2123
120日間	0.3913	0.3306	0.3087	0.2870

出典：大村・楠見（2012）

しつつある。

３．１　ヒストリカル・ボラティリティ

ヒストリカル・ボラティリティは，現在と過去の収益率のデータを使って求めた標準偏差である。例えば，日経新聞社の日経ヒストリカル・ボラティリティは当日も含めて過去20営業日（１カ月）分のデータから計算されている。

表１には，大村・楠見（2012）が推定したヒストリカル・ボラティリティの値が示されている。ヒストリカル・ボラティリティは，使用するデータの対象日数を変えただけで値が異なる。また，観測する日を変更しただけでも値が異なる。ブラック・ショールズのモデルではボラティリティが一定である仮定しているが，ボラティリティは日々変動すると考える方が自然である。

３．２　インプライド・ボラティリティ

インプライド・ボラティリティは，実際に市場で成立しているオプションのデータから，モデルを利用して現実値と理論値を一致させるように，逆算によって求めたボラティリティである。モデルとして，ブラック・ショールズのモデルがよく利用されているため，前述のオプション価格評価式から逆算される。なお，この方法は Lante and Rendleman（1976）や Chiras and Manaster（1978）の貢献により，1970年代後半ぐらいから使われ始めている。インプライド・ボラティリティをボラティリティ予測に用いる場合は，予測値 $\hat{\sigma}$ に残存期間の平方根 $\sqrt{\tau}$ を掛けた値 $\hat{\sigma}\sqrt{\tau}$ を使う。これはブラック・ショールズにおいて，満期まで累積されたボラティリティを表している。

表２　日経平均コールオプションから計算されたインプライド・ボラティリティ（2000年９月１日）

		満期までの期間の長さ（日数）			
		7	42	70	98
行使価格（100円）	185	0.339	0.208	0.205	
	180	0.259	0.205	0.225	0.198
	175	0.229	0.204	0.218	0.205
	170	0.212	0.202	0.231	0.208
	165	0.273	0.205	0.262	0.228
	160	0.245	0.250	0.246	0.205
	155	0.768	0.362	0.308	0.296
	150	0.742	0.397	0.463	0.353
	145	0.920	0.463	0.414	

出典：小暮・照井（2001）

表２には，小暮・照井（2001）が計算したインプライド・ボラティリティの値が示されている。同じ原資産なので，ブラック・ショールズのモデルの仮定が正しいのであれば，同じ値となるとなるはずである。

図６は，表２のデータについて，残存期間ごとに縦軸にインプライド・ボラティリティをとり，横軸に行使価格をとった図である。同じ残存期間でも水平線とならず，微笑を連想させるカーブとなっている。このカーブは，ボラティリティ・スマイルと呼ばれている。

日経新聞社は1989年から2010年まで，日経インプライド・ボラティリティを公表していた。これは日経平均オプションについて，直近限月のニアザマネーのコールとプットの４つのインプライド・ボラティリティの値を平均して求めたものである。図６にも示されているように，限月期日に近づくと値がはねるという欠点がある。

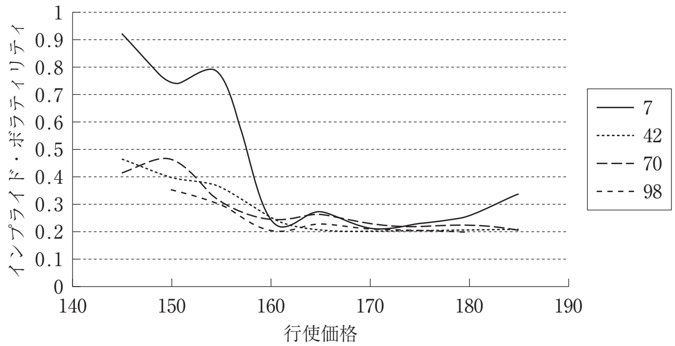
ブラック・ショールズモデルでは，ボラティリティは一定としてオプション価格を評価している。しかし，現実に取引されている価格から逆算したインプライド・ボラティリティでは，ボラティリティは一定とはならず，ボラティリティ・スマイルが観察される。そこで，観測できないボラティリティが変動するとして，Scott（1987），Hull and White（1987），Wiggins（1987）および Heston（1993）などがブラック・ショールズのオプション評価方法を拡張している。Heston（1993）は，ボラティリティが CIR モデル（Cox, Ingersoll and Ross（1985））に従うと仮定して，オプション価格を評価する方法を提案した。

$$dS_t = \mu S_t dt + v_t^{1/2} S_t dB_{1t},$$
$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma v_t^{1/2} dB_{2t},\ \ E(dB_{1t}dB_{2t}) = \rho dt$$

Heston（1993）のモデルでは，２つのブラウン運動には相関があると仮定している。もし $\rho<0$ であれば，金融資産価格の増加はボラティリティの減少をもたらし，金融資産価格の下落はボラティリティの増加をもたらすことになる。これは，レバレッジ効果と呼ばれる。

ファイナンスにおけるボラティリティ変動モデルの発展と並行して，時系列分析の分野でもボラティリティ変動モデルの研究が進んでいる。次節では，時系列分析のアプローチを紹介する。

図 6　ボラティリティ・スマイル



3．3　時系列分析におけるボラティリティ変動モデル

金融資産のリターンのボラティリティには，主に 3 つの特徴がある。第 1 に，大きな変動の後には大きな変動が続き，小さな変動の後には小さな変動が続く。すなわち，ボラティリティは持続性をもつと考えられる。第 2 に収益率と将来のボラティリティの負の相関関係である。すなわち，収益率の減少（増加）がボラティリティの増加（減少）をもたらす。これは前述のレバレッジ効果である。第 3 にリターンの分布は，正規分布よりも厚い裾をもつという点である。金融資産のリターンのボラティリティのモデル化において大きな役割を果たしているのが，Engle（1982）によって開拓された ARCH（Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, 自己回帰条件付き不均一分散）型のモデルである。また Clark（1973）や Taylor（1982, 1986）による SV（Stochastic Volatility, 確率的ボラティリティ）モデルである。ここでは，ARCH 型モデルと SV モデルについて紹介する。

Bollerslev（1986）は，Engle（1982）の ARCH モデルが移動平均過程に対応していることを指摘し，これを自己回帰移動平均過程へ拡張した GARCH（Generalized ARCH）を提案した。さらに上記の 3 つの特徴を備えた ARCH 型モデルとして，Glosten, Jagannathan, and Runkle（1992）の GJR モデル

$$y_t=\mu_t+u_t,$$
$$u_t=\sqrt{h_t}\,z_t,\quad z_t\sim iid(0,1),$$
$$h_t=\omega+\alpha u_{t-1}^2+\gamma n_{t-1}^2+\beta h_{t-1}$$

がある。ただし，z_t は平均が 0 で分散が 1 の独立同一分布であり，$n_t=u_t\times I\ (u_t<0)$ である。ここで $I(A)$ は指示関数であり，条件 A が成り立つとき 1 をとり，成り立たなければ 0 となる。また μ_t は条件付き平均 $\mu_t=E(y_t|\Im_{t-1})$ とする。ただし $\Im_t$ は，時点 t において，現時点と過去の情報からなる情報集合である。このとき，z_t の分布が対称であるならば，y_t が定常過程であるためにパラメータに制約条件

$$\omega>0,\quad 0<\alpha<1,\quad 0<\beta<1,\quad 0<\alpha+\beta+\frac{1}{2}\gamma<1$$

が課される。非対称性に関わるパラメータは γ である。GJR モデルで $u_{t-1}\geq 0$ のとき ${u_{t-1}}^2$ の係

数は α だが，$u_{t-1}<0$ のとき u_{t-1}^2 の係数は $\alpha+\gamma$ となる。したがって，$\gamma>0$ であれば，レバレッジ効果を表現することができる。なお $\gamma=0$ のときは GARCH モデルに退化する。また，z_t の分布として，基準化 t 分布や Nelson（1991）の GED（Generalized Error Distribution）など，正規分布よりも裾の厚い分布が使われる。

GJR モデルと並んで，実証分析に頻繁に使われるモデルが Nelson（1991）の Exponential GARCH（EGARCH）モデル

$$\ln h_t = m + \phi \ln h_{t-1} + \xi_{t-1},$$
$$\xi_t = \theta z_t + \lambda\{|z_t| - E|z_t|\}$$

である。ここで仮定より，$E(\xi_t)=0$ かつ $V(\xi_t)<\infty$ であり，ξ_t は独立同一分布に従う。このモデルの形状から明らかなように，$\ln h_t$ は AR (1) 過程に従っている。もちろん，ARFIMA (p, d, q) 過程に拡張することができる。AR (1) の定常性の条件より，この EGARCH モデルの定常性の条件は $|\phi|<1$ である。非対称性については，$z_t\geq 0$ のとき z_t の係数は $\theta+\lambda$ であり，$z_t<0$ のときの係数は $\theta-\lambda$ である。したがって，$\theta<0$ かつ $\lambda>0$ であればレバレッジ効果を表現できる。GJR モデルと同様に，通常，正規分布よりも裾の厚い分布が用いられる。

上記の GJR モデルと EGARCH モデルは，最尤法で推定できる。ARCH 型のモデルでは，パラメータの値と現時点までのデータが与えられれば，1期先の分散を求めることができる。すなわちボラティリティ（分散の平方根）の将来予測に使える。

ARCH 型モデルと関連するモデルとして，旧 JP Morgan のリスクメトリクス

$$h_t = (1-\lambda)u_{t-1}^2 + \lambda h_{t-1}$$

がある。これは GARCH モデルにおいて $\alpha=1-\alpha$，$\beta=\lambda$，$\omega=0$ としたモデルであり，Integrated GARCH モデルと呼ばれる。ただし，リスクメトリクスでは，パラメータを推定せずに，$\alpha=0.95$，0.98 など事前に決めた値を用いる。また平均についても推定せずに $\mu_t=0$ とする。このアプローチは，指数平滑化法とも解釈できる。IGARCH の構造からリスクを過大評価する傾向にあるため，リスクに対して保守的な，ボラティリティの予測方法と考えられる。

次に SV モデルについて紹介する。金融経済の分野に，ボラティリティが確率的に変動するという考えをもちこんだのは Clark（1973）の貢献である。Taylor（1982，1986）はこのアイデアを拡張して，ボラティリティの対数値が AR (1) モデルに従うと仮定した。単純な SV モデルは

$$y_t = \mu_t + z_t \exp(\alpha_t/2),\quad z_t \sim N(0,1),$$
$$\alpha_{t+1} = m + \phi\alpha_t + \sigma_\eta \eta_t,\quad \eta_t \sim N(0,1),$$

と定式化される。なお，単純な SV モデルでは，z_t と η_t は互いに独立と仮定する。2つの確率変数を用いているため，リターンの分布は正規分布よりも裾が厚くなっている。SV モデルは ARCH 型のモデルと比較すれば，モーメントの導出が容易である。反面，尤度関数を導くには潜在的な変数 α_t のベクトルを積分する必要がある。最尤推定が困難であるため，GMM による方法，シミュレーションにより求めた尤度を最大化する方法，またマルコフ連鎖モンテカルロ法など様々な方法が提案されている。詳しくは，Shephard（2005），Asai, McAleer and Yu（2006）， Chib, Omori and Asai（2009）などのサーベイ論文を参照してほしい。

非対称性をもつSVモデルとして，Wiggins（1987），Chesney and Scott（1989），Harvey and Shephard（1996）などは，z_t と η_t が負の相関を持つモデルを考えている。すなわち，$E(z_t\eta_t)=\rho<0$ である。2変量正規分布の性質から $\eta_t|z_t \sim N(\rho z_t, (1-\rho^2))$ となるので，$z_t<0$ のとき将来の分散 α_{t+1} が増加することになる。この非対称SVモデルはEGARCHモデルとよく似ており，Nelson（1990）は非対称SVモデルもEGARCHモデルも，その極限として同じ連続時間モデルに収束することを示している。SVとEGARCHモデルの類似性からAsai and McAleer（2011）は，一般化非対称SVモデル

$$
\begin{aligned}
&y_t=\mu_t+z_t\exp(\alpha_t/2),\ z_t\sim N(0,1),\\
&\alpha_{t+1}=m+\phi\alpha_t+\zeta_t,\\
&\zeta_t=\gamma_1 z_t+\gamma_2\{|z_t|-E|z_t|\}+\sigma_\nu\nu_t,\ \nu_t\sim N(0,1),
\end{aligned}
$$

を提案した。このモデルは $\sigma_\eta=0$ であればEGARCHモデルに退化し，$\gamma_1=\gamma_2=0$ であれば単純なSVモデルに退化する。また $\gamma_2=0$ であれば，$\sigma_\eta^2=\sigma_v^2+\gamma_1^2$ および $\rho=\gamma_1/\sqrt{\sigma_v^2+\gamma_1^2}$ とおくと非対称SVモデルに退化する。言い換えると，Asai and McAleer（2011）の特徴は，レバレッジ効果だけでなく，規模の効果 $\gamma_2\{|z_t|-E|z_t|\}$ を考慮している点にある。なお，Asai and McAleer（2005）では基準化されていない規模の効果 $\gamma_2|y_t-\mu_t|$ を用いているので，Asai and McAleer（2011）はAsai and McAleer（2005）の拡張とも解釈できる。その他の非対称SVモデルとして，So, Li and lam（2002）は閾値によるアプローチを提案している。

ボラティリティ・モデルのさらなる拡張として，裾の厚さや長期記憶，ジャンプ等がある。裾の厚さについては，Asai（2008, 2009）やOmori et al.（2007）のサーベイを参照してほしい。また，長期記憶やジャンプについては，次章でも扱う。

日次のボラティリティ（または分散）のモデル化や予測のために，様々なARCH型のモデルやSVモデルが考案されてきた。日々のボラティリティは観測できないため，このようなモデルが有用である。ここで，もしも実際に日次のボラティリティを観測できるとしたら，より効果的な予測ができるだろう。この問題意識から，近年注目を集めているのが，ティック・データを使って，モデルフリーの日次のボラティリティを推定する実現ボラティリティである。

3.4　実現ボラティリティ

実現ボラティリティとは，ティック・データ（15秒足り，1分足り，取引ごと等）を使って，1日の価格変動から収益率のボラティリティを推定したものである。データから単に標準偏差（のようなもの）を求めるだけであるので，非常にシンプルである。非常に魅力的な方法であるが，時間間隔を短くしていく（データの頻度を高める）とマイクロ・ストラクチャー・ノイズが生じて，バイアスが生じてしまうという問題がある。また高頻度データでは，価格ジャンプの影響も考慮にいれなくてはならない。このような点を踏まえて，高頻度データによる推定方法として近年用いられている方法が，Barndorff-Nielsen et al.（2008）（以下BHLS）のアプローチである。ここでは，BHLSによるアプローチを紹介する。

区間 $[0,t]$ における変動を考えたい。時点 τ における資産価格の対数値を Y_τ とし，Y_τ は BMSJ 過程（Brownian semimartingale plus jump process）

$$Y_\tau=\int_0^\tau a_u du+\int_0^\tau \sigma_u dW_u+J_\tau$$

に従うとする。ここで $J_\tau=\sum_{i=1}^{N_\tau}C_i$ はジャンプ過程でありであり，区間 $[0,\ \tau]$ におけるジャンプの回数が N_τ である。なお $N_\tau<\infty$ である。また a_u はドリフト項，σ_u はボラティリティ項，W_u はブラウン運動を表している。第 t 日における２次変動（QV，quadratic variation）は，任意の確定的な分割 $0=\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_n=t$ に対して

$$[Y]_t=\mathrm{plim}\sum_{j=1}^{\tau_j\le t}(Y_{\tau_{j+1}}-Y_{\tau_j})^2=\int_0^t \sigma_u{}^2 du+\sum_{i=1}^{N_t}C_i{}^2$$

で与えられる。ただし $n\to\infty$ のとき $\sup_j\{\tau_{j+1}-\tau_j\}\to 0$ と仮定する。なお，$\int_0^t \sigma_u{}^2 du$ は累積分散（IV，Integrated Variance）と呼ばれる。

いま Y_{τ_j} について，マイクロ・ストラクチャー・ノイズを含んだ値を $X_{\tau_j}=Y_{\tau_j}+U_{\tau_j}$ とする。ただし，ノイズ U_{τ_j} は互いに独立で，平均はゼロ，分散は一定であるとする。このノイズの原因として，ビッドとアスクの差が急激に開いたりする場合や記録ミス等があげられる。この高頻度データ X_{τ_0}，…，X_{τ_n} を用いて，日次の QV を推定するために単純な方法としてリアライズド・ボラティリティ（RV，Realized Volatility）がある。いま x_j を高頻度データの時間間隔 $[\tau_{j-1},\ \tau_j]$ における収益率とすると，RV は $\sum_{j=1}^{n}x_j{}^2$ の平方根で定義される。一見すると適切な推定量のように思われるが，マイクロ・ストラクチャー・ノイズのもとでは一致性をもたない。

この問題のため BHLS（2008）は次のような推定方法を提案した。まず非負の値をとる推定量として

$$K(X)=\sum_{h=-H}^{H}k\left(\frac{h}{H+1}\right)\gamma_h,\quad \gamma_h=\sum_{j=|h|+1}^{n}x_j x_{j-|h|}$$

を考える。ただし $k(x)$ はカーネル・ウェイト関数である。BHLS（2008）は様々なウェイト関数を考えているが，本稿では BHLS（2009）にならい Parzen カーネル関数

$$k(x)=\begin{cases}1-6x^2+6x^3 & 0\le x\le 0.5\\ 2(1-x)^3 & 0.5\le x\le 1\\ 0 & x>1\end{cases}$$

を紹介する。このとき $K(X)\xrightarrow{p}[Y]_t$ となり，$K(X)$ は $[Y]_t$ の一致推定量となる。この推定量は，リアライズド・カーネル（RK，Realized Kernel）と呼ばれる。

日経新聞社は，１分間隔のデータを使用して作成した日経 RV を後悔している。現状として，RK のほか様々な方法が提案されているが，今後，主流となる方法が確定されていくにつれて，

その方法に変更されると期待される。

さて，RV や RK を使えば日々変動するボラティリティを計算できるので，時系列モデルを応用して，ボラティリティ予測ができる。例えば，Andersen et al.（2003），Asai, McAleer and Medeiros（2012b），Koopman, Jungbacker, and Hol（2005），Pong et al.（2004）などは，ARFIMA モデルを使ってボラティリティ予測を行っている。これに対し，Corsi（2009）は HAR（Heterogeneous Autoregression）モデルを長期記憶モデルの近似として用いることを考えた。HAR モデルは推定が簡単なため，Corsi and Renò（2010），Martens, van Dijk, and de Pooter（2009）などでも用いられている。Shephard and Sheppard（2010）は，ボラティリティ・モデルの構築の際に RV，RK およびレンジの 3 つの情報を使うアプローチを提案している。また，Asai, McAleer and Medeiros（2012a，b）では，マイクロ・ストラクチャー・ノイズだけでなく，推定による誤差も考慮した上で，ボラティリティ予測モデルを構築する方法を検討している。なお，RV による予測の評価については，例えば Andersen, Bollerslev and Meddahi（2005）のアプローチがある。

RV による予測モデルとして，その他，Hansen, Huang and Shek（2012）の GRACH モデルと RV を結びつけた Realized GARCH モデルがある。この枠組みでは，Asai, McAleer and Medeiros（2012b）や Koopman, Jungbacker, and Hol（2005）のアプローチは Realized SV と解釈できる。なお近年の学界では，実現共分散の研究に関心が移ってきている。例えば，Asai and McAleer（2015）では様々な実現共分散モデルの予測力の比較を行っている。

3.5　モデルフリー・ボラティリティ指数

これまで時系列分析のアプローチによるボラティリティのモデル化や実現ボラティリティについて紹介してきた。特に，実現ボラティリティはモデルフリーのアプローチである。これに対しファイナンス（特にオプション価格の評価）では，ボラティリティの推定にインプライド・ボラティリティが用いられてきた。その際に使われているモデルは，BS モデルであった。ここでは，ファイナンスにおけるモデルフリーなインプライド・ボラティリティとして，ボラティリティ指数を紹介する。

行使価格 K に対し，第 t 日の時点 τ のコールとプットのオプション価格をそれぞれ $C_\tau(K)$ および $P_\tau(K)$ とすると，関係式

$$E\left[\int_\tau^T \sigma^2(s)ds\right]=2\left(\int_0^F \frac{P_\tau(K)}{K^2}dK+\int_F^\infty \frac{C_\tau(K)}{K^2}dK\right)$$

が導かれる。ただし，F は原資産の受け渡し時点 T のフォワード価格である。ここで累積分散の定義を振り替えると，第 t 日の累積分散は $IV_t=\int_{\tau_o}^{\tau_n}\sigma^2(s)ds$ で与えられる。上記の式と比較して，積分の区間の違いに注意してほしい。上記の関係式は，第 t 日の累積分散ではなく，第 t 日の時点 τ から満期 T までの累積分散の期待値を考えている。これは将来のボラティリティの予想と解釈できる。この累積分散の期待値を計算するには，様々な行使価格を使って数値積分をすればよい。例えば，Jian and Tian（2007）を参照してほしい。

これはシカゴ・オプション取引所のボラティリティ・インデックス（VIX, volatility index）や日経新聞社の日経 VI（2010年11月～）の考え方のもとになっている。これらの指数では，現時点のオプション価格から満期が30日となるように調整する等して，将来のボラティリティの期待値を求めている。なお日本では，大阪大学 CSFI が，VIX の日本版として2008年 8 月から様々な改良を加えながらボラティリティ・インデックスを発展させている。

リーマンショック以降，日本で VIX を「恐怖指数」と訳すメディアが多かったが，この訳語は誤解を招きやすい。ボラティリティはリスクの指標であり，リスクが大きいときはリターンも大きくなる可能性があるからである。なお日経新聞社では，日経 VI の導入にあたり「恐怖指数」という言葉を使わなくなったと聞いている。

第 3 節では，さまざまなボラティリティの推定方法を紹介してきた。時系列分析では原資産の収益率からボラティリティを求めるのに対し，ファイナンスでは，インプライド・ボラティリティとして，オプション価格から示唆されるボラティリティを使う。どちらのアプローチでも，近年ではモデルフリーの方法が注目を集めている。

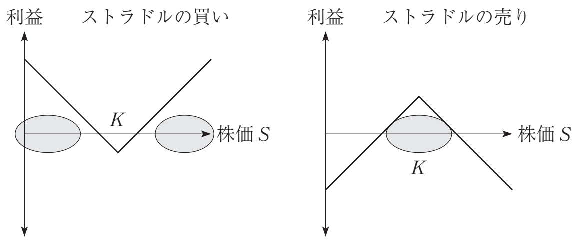
4．ボラティリティの新展開

ボラティリティ指数を使って，新たなデリバティブを作ることができる。このアイデアは，Brenner and Galai（1989）まで遡ることができる。ここでは，ボラティリティ指数を利用した先物，オプション，およびスワップについて紹介する。

図 7 のように，オプション取引との応用として，同じ原資産のコールとプットを組み合わせたストラドルについて考える。原資産の価格が大きく下落するか大きく上昇すると予想されるとき，ストラドルの買い（コール 1 単位の買いとプット 1 単位の買いの組み合わせ）という戦略が考えられる。この場合，原資産が上昇しても下降しても利益を得られる。同様にして，原資産の価格の大きな変化が予想されないときの戦略として，ストラドルの売りが考えられる。例として，投資家は，日経平均のボラティリティが17％から15％に減少すると予想しているとする。言い換えると，日経平均は大きく動かないと予想しているということである。この予想に確信がもてるなら，ストラドルを売るべきである。予想に反して，ボラティリティが17％のまま日経平均が大きく動いてしまえば，当然，投資家は損をしてしまう。このような場合，ストラドルの代わりに VI 先物を使うことができる。満期において，VI を17％として売る契約をしておく。VI が15％に下がれば，利益を得ることができる。もちろん，先物はゼロサム・ゲームなので，VI が上昇してしまえば後悔することになる。このような後悔の緩和する方法として，「権利」の取引であるオプションの利用が考えられる。

次にボラティリティ・スワップについて紹介する。ボラティリティ・スワップは，一定期間 [0,T] の間，実現ボラティリティ（RV）と，契約時に定めた一定値 V_K（ボラティリティ・スワップ・レート）を交換する取引である。また同種の取引として，バリアンス・スワップ取引がある。これは，RV の 2 乗に関する取引である。架空の商品としてボラティリティを金額に変換（下記の L）する。前の例と同様に，ボラティリティについて明確な予想がある場合，ストラドルを組

図7　満期におけるストラドルのペイオフ



む代わりに，ボラティリティ・スワップ（またはバリアンス・スワップ）取引を考えることができる。バリアンス・スワップの価格は，$L_{VAR}[VIX_t^2-V_K]e^{-rT}$ で与えられる。ただし，VIX_t はボラティリティ指数であり，時点 t から満期 T までの累積分散の予想を表している。満期における買い手のペイオフは $L_{VAR}[RV_{t,T}{}^2-V_K]$ で与えられる。ただし，$RV_{t,T}$ は区間 $[t,T]$ における実現分散である。ボラティリティ・スワップの価格計算についても，同様に考えることができる。

なおバリアンス・スワップについて，そのプレミアムの予想値は $VIX_t^2-E_t{}^P[RV_{t,T}^2]$ で与えられる。このようなバリアンス・リスク・プレミアムに関する研究は，近年大きな注目を集めており，Barndirff-Nielsen and Veraart（2013），Bekaert and Hoerova（2014），Bollerslev, Gibson and Zhou（2011），Bollersrev, Tauchen and Zhou（2009），Todorov（2010）によって取り組まれている。

本節では，ボラティリティ指数を使ったデリバティブ取引として，先物，オプションおよびスワップの考え方を紹介した。その構造上，ボラティリティ指数の先物とスワップは同種の取引である。なお，大阪取引所では，2012年２月より日経平均 VI 先物が取引されている。これは今後，ボラティリティ指数を使ったオプション取引に発展する可能性がある。

5．ま　と　め

本稿では，ファイナンスにおけるボラティリティの役割を確認した上で，ボラティリティのモデル化・推定・予測方法について紹介してきた。特に，時系列分析によるアプローチでも，ファイナンスにおけるアプローチでも，近年はモデルフリーな方法が注目を集めており，その考え方を紹介した。最後に，ボラティリティ指数を使ったデリバティブ取引について紹介した。

日本では，まだ日経平均 VI オプション取引はまだない。筆者は，デリバティブ取引は，本来，利用者のリスクをヘッジすることを目的としていると考えている。日本においてボラティリティ指数を使った取引が，マネーゲームにならずに，リスクヘッジを目的としながら発展することを期待したい。

参考文献

Andersen, T. G., T. Bollerslev, F. X. Diebold, and P. Labys（2003），“Modeling and Forecasting Realized Volatility”, *Econometrica,* 71, 529–626.

Andersen, T. G., T. Bollerslev and N. Meddahi (2005), "Correcting the Errors: A Note on Volatility Forecast Evaluation based on High-Frequency Data and Realized Volatilities", *Econometrica,* 73, 279–296.

Asai, M. (2008), "Autoregressive Stochastic Volatility Models with Heavy-Tailed Distributions: A Comparison with Multifactor Volatility Models", *Journal of Empirical Finance,* 15, 332–341.

Asai, M. (2009), "Bayesian Analysis of Stochastic Volatility Models with Mixture-of-Normal Distributions", *Mathematics and Computers in Simulation,* 79, 2579–2596.

Asai, M., and M. McAleer (2005), "Dynamic Asymmetric Leverage in Stochastic Volatility Models", *Econometric Reviews,* 24, 317–332.

Asai, M., and M. McAleer (2009), "The Structure of Dynamic Correlations in Multivariate Stochastic Volatility Models", *Journal of Econometrics,* 150, 182–192.

Asai, M., and M. McAleer (2011), "Alternative Asymmetric Stochastic Volatility Models", *Econometric Reviews,* 30, 548–564.

Asai, M., and M. McAleer (2015), "Leverage and Feedback Effects on Multifactor Wishart Stochastic Volatility for Option Pricing", *Journal of Econometrics,* 187, 436–446.

Asai, M., and M. McAleer (2015), "Forecasting Co-Volatilities via Factor Models with Asymmetry and Long Memory in Realized Covariance", *Journal of Econometrics* に掲載予定。

Asai, M., M. McAleer, and M. Medeiros (2012a), "Modelling and Forecasting Daily Volatility with Noisy Realized Volatility Measures". *Computational Statistics & Data Analysis,* 56, 217–230.

Asai, M., M. McAleer, and M. Medeiros (2012b), "Asymmetry and Long Memory in Volatility Modeling", *Journal of Financial Econometrics,* 10, 495–512.

Asai, M., M. McAleer and J. Yu (2006), "Multivariate Stochastic Volatility: A Review", *Econometric Reviews,* 25, 145–175.

Barndorff-Nielsen, O. E. and Veraart, A. E. D. (2013), "Stochastic Volatility of Volatility and Variance Risk Premia', *Journal of Financial Econometrics,* 11, 1–46.

Bekaert, G., and M. Hoerova (2014), "The VIX, the Variance Premium and Stock Market Volatility", *Journal of Econometrics,* 183, 181–192.

Black, F. and M. Scholes (1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy,* 81, 637–654.

Brenner M, and D. Galai (1989), "New Financial Instruments for Hedging Changes in Volatility", *Financial Analysts Journal,* 45, 61–65.

Bollerslev, T. (1986), "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", *Journal of Econometrics,* 31, 307–327.

Bollerslev, T., M. Gibson, and H. Zhou (2011), "Dynamic Estimation of Volatility Risk Premia and Investor Risk Aversion from Option-Implied and Realized Volatilities", *Journal of Econometrics,* 160, 235–245.

Bollerslev, T., G. Tauchen, and H. Zhou (2009), "Expected Stock Returns and Variance Risk Premia", *Review of Financial Studies,* 22, 4463–4492.

Carr, P., and L. Wu (2009), "Variance Risk Premiums", *Review of Financial Studies,* 22, 1311–1341.

Chesney, M., and L. O. Scott (1989), "Pricing European Currency Options: A Comparison of the Modified Black-Scholes Model and a Random Variance Model", *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* 24, 267–284.

Chib, S., Y. Omori and M. Asai (2009), "Multivariate Stochastic Volatility", in: T. G. Andersen, R. A. Davis, J.-P. Kreiss and T. Mikosch (eds.), *Handbook of Financial Time Series,* Springer-Verlag, New York, 365–400.

Chiras, D. P., and S. Manaster (1978), "The Information Content of Option Prices and a Test of Market Efficiency", *Journal of Financial Economics,* 6, 213-234.

Clark, P. K. (1973), "A Subordinated Stochastic Process Model with Fixed Variance for Speculative Prices", *Econometrica,* 41, 135-156.

Corsi, F. (2009), "A Simple Approximate Long-Memory Model of Realized Volatility", *Journal of Financial Econometrics,* 7, 174-196.

Corsi, F., and R. Renò (2010), "HAR Volatility Modelling with Heterogeneous Leverage and Jumps", 未刊行論文, Università di Siena.

Cox, J. C., J. E. Ingersoll, and S. A. Ross (1985), "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica,* 53, 385-408.

Engle, R. F. (1982), "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation", *Econometrica,* 50, 987-1007.

Glosten, L., R. Jagannathan, and D. Runkle (1992), "On the Relation between the Expected Value and Volatility of Nominal Excess Returns on Stocks", *Journal of Finance,* 46, 1779-1801.

Harvey, A. C., and N. Shephard (1996), "Estimation of an Asymmetric Stochastic Volatility Model for Asset Returns", *Journal of Business and Economic Statistics,* 14, 429-434.

Heston, S. L. (1993), "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options", *Review of Financial Studies,* 6, 327-343.

Hull, J. C., and A. White (1987), "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities", *Journal of Finance,* 42, 281-300.

Jian, G. T., and Y. S. Tian (2007), "Extracting Model-Free Volatility from Option Prices: An Examination of the VIX Index", *Journal of Derivatives,* 14, 35-60.

Latane, H. A., and R. J. Rendleman (1976), "Standard Deviations of Stock Price Ratios Implied in Option Prices", *Journal of Finance,* 31, 369-381.

Koopman, S. J., B. Jungbacker, and E. Hol (2005), "Forecasting Daily Variablity of the S&P 100 Stock Index Using Historical Realized and Implied Volatility Measurements", *Journal of Empirical Finance,* 12, 445-475.

Markowitz, H. M. (1952), "Portfolio Selection", *Journal of Finance,* 7, 77-91.

Martens, M., D. van Dijk, and M. de Pooter (2009), "Forecasting S&P 500 Volatility: Long Memory, Level Sifts, Leverage Effects, Day-of-the-Week Seasonality, and Macroeconomic Announcements", *International Journal of Forecasting,* 25, 282-303.

Nelson, D. B. (1991), "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach", *Econometrica,* 59, 347-370.

Omori, Y., S. Chib, N. Shephard, and J. Nakajima (2007), "Stochastic Volatility with Leverage: Fast and Efficient Likelihood Inference", *Journal of Econometrics,* 140, 425-449.

Pong S., M. B. Shackelton, S. J. Taylor, and X. Xu (2004), "Forecasting Currency Volatility: A Comparison of Implied Volatilities and AR(FI)MA Models", *Journal of Banking and Finance,* 28, 2541-2563.

Scott, L. O. (1987), "Option Pricing When the Variance Changes Randomly: Theory, Estimation, and an Application", *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* 22, 419-438.

Shephard, N. (2005), "General Introduction", in: N. Shephard (ed.), *Stochastic Volatility,* Oxford University Press, Oxford, 1-33.

Shephard, N., and K. Sheppard (2010), "Realising the Future: Forecasting with High-Frequency Based Volatility (HEAVY) Models", *Journal of Applied Econometrics,* 23, 197-231.

So, M. K. P., Li, W. K., and K. Lam (2002), "A Threshold Stochastic Volatility Model", *Journal of*

Forecasting, 21, 473-500.

Taylor, S. J. (1982), "Financial Returns Modelled by the Product of Two Stochastic Processes — A Study of Daily Sugar Prices 1961-79", in O. D. Anderson (ed.), *Time Series Analysis: Theory and Practice,* 1, North-Holland, Amsterdam, 203-226.

Taylor, S. J. (1986), *Modelling Financial Time Series,* Wiley, Chichester.

Tobin, J. (1958), "Liquidity Preference as Behavior Towards Risk", *Review of Economic Studies,* 25, 65-86.

Todorov, V. (2010), "Variance Risk Premium Dynamics: The Role of Jumps", *Review of Financial Studies,* 23, 345-383.

Wiggins, J. B. (1987), "Option Values under Stochastic Volatilities," *Journal of Financial Economics,* 19, 351-372.