

異常値を含むファイナンシャル・リスクと計量分析

浪花貞夫

1 はじめに

金融市場における資産価格の異常な動きは稀ではあるが重視される。たとえば1987年10月の New York 株式市場における暴落や LTCM の倒産などは投資家や市場参加者などの実務家だけでなく理論家に与える影響も予想以上となる。そこで Anderson-Bollerslev (1998) が簡潔に “Volatility permeates finance.” と要約しているように金融資産価格あるいはリターンのボラテリテイはリスクの尺度として注目される。しかし、ボラテリテイをあらかじめ予測することは困難であり何らかの方法で近似あるいは推定することになるが、推定方法は多様である。ここでファイナンシャル・リスクのうち金融機関において市場リスクに対応する標準的な指標である VaR (Value at Risk) はあらためて注目されている。

VaR は基本的には最大損失に注目するが、信頼区間外のリスクをとらえられないテイル・リスクなど定義上の問題点がある。このような問題点を補完しようとする方法として、たとえば、複数の変量における最大値の統計的性質を検討する極値理論の応用や Artzner et al. (1997) が提案する期待ショートフォールなどがある。

一方、リスク管理は小田 (2001) が指摘するように企業戦略や組織など経営全般に関わる多面的な問題であり、リスク計量に完全な方法はないことから限

界を認識したうえで目的に沿ったリスク分析を行うことになる。本章では市場リスクにおける異常値の取り扱いに関する計量分析アプローチとして、VaRの問題点とそれを補完するものとして近年提案されている極値理論および期待ショートフォールの概要と分析例を考察する。ボラティリティ・モデルおよび異常値と VaR の概要については浪花（2007a, b）を参照。

2 リスク指標

ポートフォリオの損益額を表す確率変数 X をリスク計測の対象とするとき、リスク指標を X の関数 $\rho(X)$ とする。リスク指標はポートフォリオ価値の不確実性を示すことから分散 $V(X)$ または標準偏差 $\sigma(X)$ 、あるいは絶対偏差 MAD (Mean Absolute Deviation) (X) を用いることが多い。すなわち

$$V(X) = E((X - E(X))^2)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

$$\text{MAD}(X) = E(|X - E(X)|)$$

である。これらは損益額分布の左側の損失だけでなく右側の利益をも表しているため、左側のみを考慮する下方リスク指標 $V(X)^-$ 、 $\sigma(X)^-$ 、 $\text{MAD}(X)^-$ を用いることもある。ここで $a^- = -\min(a, 0)$ である。これを発展させたものに一定の閾値 K 以下の下方部分に注目する考え方も提案されており、VaR も下方リスク指標のひとつと考えられる。

2.1 リスク指標の性質

Artzner et al. (1997, 1999) はリスク指標の満たすべき性質として次の4つを挙げている。

- (1) 単調性： $X_1 \geq X_2$ ならば $\rho(X_1) \leq \rho(X_2)$
- (2) 劣加法性： $\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$
- (3) 正の同次性： $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$ $\lambda > 0$

(4) 平行移動不変性： $\rho(X+c) = \rho(X) + c$ すべての定数関数 c

ここで(2)はポートフォリオ分散によるリスク削減効果を表しており、さらに(3)を拡張してポートフォリオの最適化を容易にするために凸性

$$\rho(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \leq \lambda \rho(X_1) + (1-\lambda)\rho(X_2)$$

を定義すると、(3)はリスク指標が劣加法性を満たすことと凸性を満たすことは同値であることが示される。このとき分散は凸性は満たすが劣加法性は満たさず、標準偏差、絶対偏差は劣加法性、凸性も満たす。重要なのは VaR は一般的に劣加法性も凸性も満たさないことである。そして後記の期待ショートフォールは劣加法性を満たし正の同次性を満たすことから凸性も満たしている。

2.2 テイル・リスク

リスクがテイル・リスクを持つとは、そのリスク指標が損益額分布の裾（テイル）部分の損失に関する情報を完全に把握できていないために、リスクの大小関係を見誤るおそれがあることを指している。たとえば損失額 s におけるポートフォリオ X_1 の分布関数 $F_1(s)$ がポートフォリオ X_2 の分布関数 $F_2(s)$ より大きい場合、ポートフォリオ X_1 の方が損益額が s 以下となる確率の高いことを意味し、分布関数が裾に関する情報の一部を与えていることを示している。これは確率変数 X_1, X_2 についてリスク指標 $\rho(X_1), \rho(X_2)$ が

$$\rho(X_1) < \rho(X_2)$$

ならば、閾値 K に関して

$$F_1(x) \leq F_2(x) \quad \forall x \quad x \leq K$$

が成立するとき閾値 K 以下では 1 次テイル・リスクがない、というものである。これが成立するか否かはポートフォリオの性質にも依存する。これは一般に n 次テイル・リスクの場合について効用関数の一般的な性質に基づいて順序付けを行う n 次確率優越の関係で議論される（たとえば、Cumperayot et al (2000), 山井, 吉羽 (2001a, b)）。

2.3 異常値と VaR

VaR 推定において注目されているのはテイル・リスクに関するもので、たとえば、収益率の分布はリスクの可能性が高いファット・テイル (fat tail) 性をもつことに注目する。市場リスクにおける VaR の計測においては異常値が生じたときの損失額を見積もるためにシナリオによるテストをが用いるが、正規分布を仮定した VaR は大幅な価格変動が発生する確率を過小評価することになる。いわば、VaR は分布の裾野に関する重要な情報を見落とす可能性があり、これをテイル・リスクと呼ぶ。このような異常値を計量するひとつのアプローチとして後述する極値理論 (EVT: Extreme Value Theory) および期待ショートフォール (expected shortfall) がある。

なお、不確実性のもとで意思決定を分析する際、投資家は合理的で多くの富を選好する一方で危険回避的とする、いわば期待効用最大化原理を仮定するのが一般的である。このために特定のリスク指標に基づく意思決定と期待効用最大化原理から導かれる意思決定との間に整合性が求められる。これに関して山井・吉羽 (2001b) は確率優越の概念を用いて整合性を考察している。

3 バリュアット・リスク (VaR: Value at Risk)

3.1 VaR の考え方

バリュアット・リスク (VaR: Value at Risk) は、金融資産を一定期間保有する場合に、ある確率のもとでの最大損失額を表そうとする。これは当局からみれば市場において異常な事態が発生したときの最小の損失額を示すと考える。見方は異なるが測定の方法は同様である。

いま、時点 t において、その後の k 期におけるポジションのリスクを考える。 $\Delta V(k)$ を t から $t+k$ における資産価値の変化とすると、その変化を資産の通貨単位で確率変数としてとらえる。 $\Delta V(k)$ の累積分布関数 CDF (cumulative distribution function) を $F_k(x)$ とするとき k 期間のロングポジションの VaR の

確率 p を

$$p = Pr\{\Delta V(k) \leq VaR\} = F_k(VaR) \quad (3.1)$$

で定義する。ロングポジション保有者は $\Delta V(k) < 0$ のとき損失となるから p が小のとき (3.1) 式の VaR は負値と仮定できる。また VaR は、確率 $(1-p)$ で k 期に遭遇する潜在的損失は VaR より小か等しいと考える。

ショートポジションの場合は時点 t から $t+k$ における資産価値の増加，すなわち $\Delta V(k) > 0$ のときに損失が発生すると考えると

$$\begin{aligned} p &= Pr\{\Delta V(k) \geq VaR\} = 1 - Pr\{\Delta V(k) \leq VaR\} \\ &= 1 - F_k(VaR) \end{aligned}$$

となる。 p が小さいときショートポジションの VaR は正値で損失を表す。

この定義は VaR は CDF ($F_k(x)$) の裾野に注目していることを示し、ロングの場合は左側，ショートの場合は右側に注目しているが $-\Delta V(k)$ とすれば同様に扱える。

1 変量の CDF ($F_k(x)$) と確率 p について

$$x_p = \inf\{x \mid F_k(x) \geq p\} \quad 0 < p < 1$$

は $F_k(x)$ の p 分位と呼ばれ、 \inf は $F_k(x) \geq p$ を満たす最小の実数を表す。実際の CDF は未知であるから、その推定と分位、とくに裾野を推定することになる。

実際に応用する場合は

- (1) p の確率は、たとえば、 $p=0.01$ あるいは $p=0.05$
- (2) 期間 k は、当局の指導にもよるが 1 日あるいは 10 日など
- (3) データの頻度は期間と同じである必要はないが、日次データを使うことが多い。
- (4) CDF ($F_k(x)$) あるいは分位
- (5) ポジションの総額あるいはポートフォリオの値洗いの価値

に注意する。VaR を算定するために、感応度，リスクファクターの変動可能性（ボラティリティ）や相関の推定値が利用される（VaR の基本的な考え方については、日本銀行（1995），小田（2001）を参照）。

3.2 計量分析における VaR 推定

VaR 推定には J. P. Morgan (1996) が開発した RiskMetrics があり, 推定モデルとしては GARCH モデル, SV モデル, 非線形ボラティリティ・モデルなどが挙げられている (たとえば, 浪花 (2007b) 参照)。基本的な考え方は, ある資産の対数収益率 r_t の一般的な時系列モデルを基礎とするもので平均, 分散方程式をそれぞれ

$$r_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i r_{t-i} + a_t - \sum_{j=1}^q \theta_j a_{t-j} \quad (3.2)$$

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^u \alpha_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^v \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (3.3)$$

で表わす。パラメータが推定されたときの条件付平均, 分散の 1 期先予測は

$$\widehat{r}_t(1) = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i r_{t+1-i} - \sum_{j=1}^q \theta_j a_{t+1-j}$$

$$\widehat{\sigma}_t^2(1) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^u \alpha_i a_{t+1-i}^2 + \sum_{j=1}^v \beta_j \sigma_{t+1-j}^2$$

で与えられる。さらに ε_t を正規分布と仮定するとき時点 t までの情報を所与として r_{t+1} の条件付分布は $N[\widehat{r}_t(1), \widehat{\sigma}_t^2(1)]$ であり, VaR 推定のための分位は, たとえば 5% では $\widehat{r}_t(1) - 1.65\widehat{\sigma}_t(1)$ となる。自由度 v の t 分布を仮定するときには p 分位を $t_v^*(p)$ として $\widehat{r}_t(1) - t_v^*(p)\widehat{\sigma}_t(1)$ となる。

(多期間の計測)

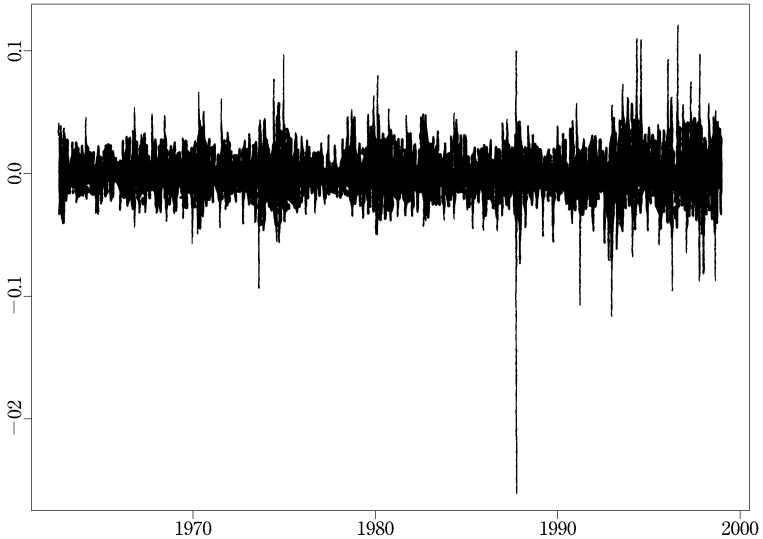
時点 h で対数収益率 r_t について k 期先の多期間 VaR を計測する場合, r_t がモデル (3.2), (3.3) 式にしたがうとすると, 想定シナリオなどの情報集合 F_h により予測する。たとえば, 条件付平均を ARMA モデルにより予測するとき $r_h(k)$ を時点 h における k 期先予測

$$\widehat{r}_h[k] = r_h(1) + \dots + r_h(k)$$

は MA 表現と (3.2) 式の ARMA モデルから予測誤差は

$$e_h(k) = r_{h+k} - r_h(k)$$

図1 IBM 株価の日次対数収益率



(出典：Tsay (2002))

であり、このときの期待ボラティリティは条件付分散

$$\text{Var}(e_h(k) | F_h) = \sigma_h^2(k) + (1 + \Psi_1)^2 \sigma_h^2(k-1) + \dots + \left(\sum_{i=0}^{k-1} \Psi_i\right)^2 \sigma_h^2(1)$$

から求められる。 Ψ はMA表現における係数である。たとえば、単純なモデル

$$r_t = \mu + a_t, \quad a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a^2_{t-1} + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

では、すべての $i > 0$ に対して $\psi_i = 0$ の場合で、分散は

$$\sigma_h^2(1) = \alpha_0 + \alpha_1 a^2_h + \beta_1 \sigma_h^2$$

$$\sigma_h^2(k) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \sigma_h^2(k-1) \quad k=2, \dots, m \quad (3.4)$$

となる。

（IBM 株価収益率と VaR の試算例）

図1のIBMの日次対数収益率について Tsay (2002) の試算は、10百万ドルのロング・ポジション、1日のVaR、 $t=9190$ （時点：1998.12.31）を推定するとき、 F_{9190} を与えて $r_{9190} = \sum_{i=1}^{15} r_{9190+i}$ から e_t を標準正規分布としたときのVaRは5%分位で287,700ドル、1%分位で409,738ドルとなる。 e_t を自由度5の t 分布を仮定したときのVaRは5%分位で283,520ドル、1%分位のときは475,943ドルとなり、正規性を仮定した場合と基本的には近い。ただし、標準正規分布の場合に比べて裾野の確率が小さくなるときのVaRは増加する。また、15日先のVaRを(3.4)式により5%分位で求めると、VaRは1,039,191ドルとなる。

3.3 分位推定と分位回帰

分位推定はVaR推定のためのノンパラメトリックなアプローチで、収益率の分布を特に仮定しない。推定法には伝統的な分位推定や分位回帰がある。分位推定(Quantile Estimation)は予測期間内の収益率の分布は標本期間内で同じと仮定し、VaR計測のために伝統的な分位を用いる。たとえば、Cox-Hinkley (1974)はポートフォリオの収益率を r_1, \dots, r_n とするとき、順序

$$r(1) \leq r(2) \leq \dots \leq r(n)$$

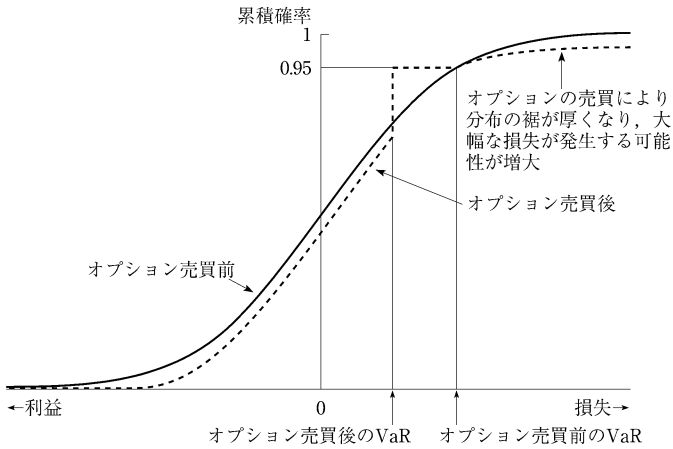
により順序統計量を決める。また分位回帰(quantile regression)は説明変数に注目するとき、説明変数を含む F_t の分布関数 $r_{t+1} | F_t$ を用いることを考える。たとえば、金融当局による金利政策のニュースが株価収益率に影響を与えると考えられる場合などに応用される。これについて Koenker-Bassett (1978) の分位回帰は、確率 p を与えたときの収益率 $\{r_t\}$ の p 分位を

$$x_p = \operatorname{argmin}_{\beta} \sum_{i=1}^n w_p(r_i - \beta)$$

とする。ここで

$$w_p(z) = \begin{cases} pz & z \geq 0 \text{ のとき} \\ (p-1)z & z < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

図2 オプションの購入に伴う VaR のテイル・リスク



(出典：山井・吉羽 (2002))

である。分位回帰は線形回帰モデル

$$r_t = \beta' x_t + a_t$$

の推定において、 a_t は F_{t-1} を与えたとき r_t の条件付分散のひとつの解釈である。条件付分散は F_{t-1} の要素の予測子を用いて

$$x_p | F_{t-1} = \inf \{ \beta_0' x | R_p(\beta_0) = \min \}$$

とする。ここで $R_p(\beta_0) = \min$ は

$$\beta_0 = \operatorname{argmin}_{\beta} \sum_{i=1}^n w_p(r_i - \beta' x_i)$$

により得られる。

3.4 VaR のテイル・リスク

Danielsson (2001) はポर्टフォリオにオプションが含まれるときに VaR にテイル・リスクが発生する例を示している。図2の実線はある株式を保有したときの損益額分布でオプション売買前の VaR である。ここでオプションを売買すれば VaR の値を減らすことを狙うはずである。オプション売買後の VaR

は点線で任意の水準に引き下げられているが、より大きな損失の発生する確率は上昇し、VaRが分布の裾を十分に捉えていないことを示している。

異常値の場合の方法としての期待ショートフォールについてもテイル・リスクは発生する。これについては後記5.2で述べる。

4 極値理論— EVT (Extreme Value Theory)

EVTは複数の変数の最大値（または最小値）など極値（extreme value）の確率的振る舞いに関する理論で、その枠組みとして次の2つが挙げられている。第1は、独立・同一分布にしたがう変数の最大値はある尺度と位置の変換によって、フレシェ（Frechet）、ガンベル（Gumbel）、ワイブル（Weibull）の3つの極値分布のいずれかに収束する、というFisher-Tippettの定理、第2は、閾値を超える超過量の分布は閾値の増加に伴い一般パレート分布に収束するというPickand-Balkema-de Haanの定理である。これらはもとの分布によらず最大値や超過量などの極値の性質を分析できる可能性を示唆している。ただし、最大値や超過量などはデータの中ではごく一部であるからパラメータ推定などで使用できるデータは限られていること、また、どの程度の水準を極値とみなすかなどの問題はある。

単純に考えればEVTは確率分布の裾野を漸近的に評価しようとするもので、たとえば、日次の離散間隔の資産収益率の集合 $\{r_1, \dots, r_n\}$ における最小収益率

$$r(1) = \min(1 \leq j \leq n) \{r_j\}$$

は最大収益率

$$r(n) = \max(1 \leq j \leq n) \{r_j\}$$

に比べれば最大損失を発生させる可能性の高いことに注目し、そのような場合にVaRへの適用を考えるのである。

4.1 EVT の考え方

EVT は基本的には分布の上位 $a\%$ のような分位に注目する。ここで問題は最大値の確率的性質が観測値の和の確率的性質に関する統計学の大数の法則と同様の結果を得ることが困難なことである。

いま、 r_i は累積分布関数を $F(x)$ をもち、系列相関はなく、対数収益率の場合、レンジ $[k, u]$ は $[-\infty, \infty]$ とする。このとき $r(1)$ の CDF は

$$\begin{aligned} F_{n1}(x) &= Pr[r_{(1)} \leq x] = 1 - Pr[r_{(1)} > x] \\ &= 1 - Pr[r_1 > x, r_2 > x, \dots, r_n > x] \\ &= 1 - [1 - F(x)]^n \end{aligned} \quad (4.1)$$

で与えられる。

実際には $F(x)$ は未知であるが、 n が無限大のとき $F_{n1}(x) \rightarrow 0$ ($x \leq k$ のとき)、 $F_{n1}(x) \rightarrow 1$ ($x > k$ のとき) で、実際には 2 つの列 $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, ($\alpha_n > 0$) において $r_{(1)*} = (r_{(1)} - \beta_n) / \alpha_n$ の分布が収束することに注目する。 $*$ は最小を示す。 $\{\beta_n\}$ は位置、 $\{\alpha_n\}$ はスケールパラメータとすると、独立性の仮定から正規化した最小 $r_{(1)*}$ の極限分布は

$$F_*(x) = \begin{cases} 1 - \exp[-(1+kx)^{1/k}] & k \neq 0 \text{ のとき} \\ 1 - \exp[-\exp(x)] & k = 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (4.2)$$

で、 $k < 0$ のとき $x < -1/k$, $k > 0$ のとき $x > -1$, $k \rightarrow 0$ の極限は $k = 0$ で、 k は裾野の動向を示すシェイプ・パラメータ、パラメータ $\alpha = -1/k$ は分布の裾野指数 (tail index) と呼ばれる。

(4.2) 式の極値分布は Jenkinson (1955) の一般化極値分布で、Gnedenko (1943) は極限分布を次の 3 つの型に分けている。CDF を $F_*(x)$ で表すとき

タイプ 1 : $k = 0$ ガンベル族 (Gumbel family)

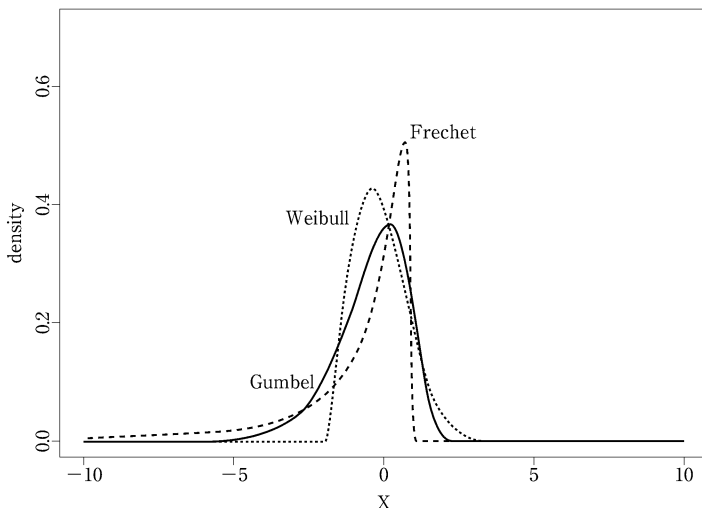
$$F_*(x) = 1 - \exp[-\exp(x)], \quad -\infty < x < \infty \quad (4.3)$$

タイプ 2 : $k < 0$ フレシェ族 (Frechet family)

$$F_*(x) = \begin{cases} 1 - \exp[-(1+kx)^{1/k}] & x < -1/k \text{ のとき} \\ 1 & \text{それ以外} \end{cases} \quad (4.4)$$

タイプ 3 : $k > 0$ ワイブル族 (Weibull family)

図3 異常値分布の確率密度関数



(出典：Tsay (2002))

$$F_*(x) = \begin{cases} 1 - \exp[-(1+kx)^{1/k}] & x > -1/k \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外 (4.5)} \end{cases}$$

要約すると $F(x)$ の裾野は最小 $F_*(x)$ の極限分布を決める。図3はその例である。

Fisher-Tippett 定理はこれを整理し、 n 個の観測値 M_n について、ある確率分布 H と定数 $c_n > 0$, $d_n \in \mathbb{R}$ が存在して $(M_n - d_n)/c_n \rightarrow H$ のとき H はフレシェ分布、ワイブル分布、ガンベル分布のいずれかと同じ型とするもので、これらの分布を極値分布と呼んでいる。

一般に用いられている連続的な分布のほとんどは3つの極値分布に収斂するといわれ、その分布の集合を最大値吸引域 (maximum domain attraction) という。その例は表1で、裾野が厚いといわれる対数正規分布はガンベル分布に属するといわれるが、ガンベル分布は極値分布では比較的裾野が薄い。リスク管理の観点からは安定分布、 t 分布を含み左裾の厚いフレシェ分布に注目することが多い。

表1 極値分布の最大値吸引域に属する分布

フレシェ分布	ガンベル分布	ワイブル分布
コーシー分布 パレート分布	正規分布 対数正規分布 指数分布	一様分布 ベータ分布

確率密度関数は (4.2) 式を微分して

$$f_*(x) = \begin{cases} (1+kx)^{1/(k-1)} \exp[-(1+kx)^{1/k}] & k \neq 0 \text{ のとき} \\ \exp[x - \exp(x)] & k = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

で表され、 $k=0$ のとき $-\infty < x < \infty$ 、 $k < 0$ のとき $x < -1/k$ 、 $k > 0$ のとき $x > -1/k$ である。

これらの EVT は 2 つの示唆を与える。第 1 は r_t の CDF の裾野は特別の分布というより最小の極限分布 $F_*(x)$ を与えることから r_t の分布について広い範囲に適用可能なこと、ただし、 $\{\beta_n\}$ 、 $\{\alpha_n\}$ は CDF $F(x)$ に依存する。第 2 は、裾野指数 k は r_t の時間間隔に依存しないことから VaR への応用も容易と考えられることである。

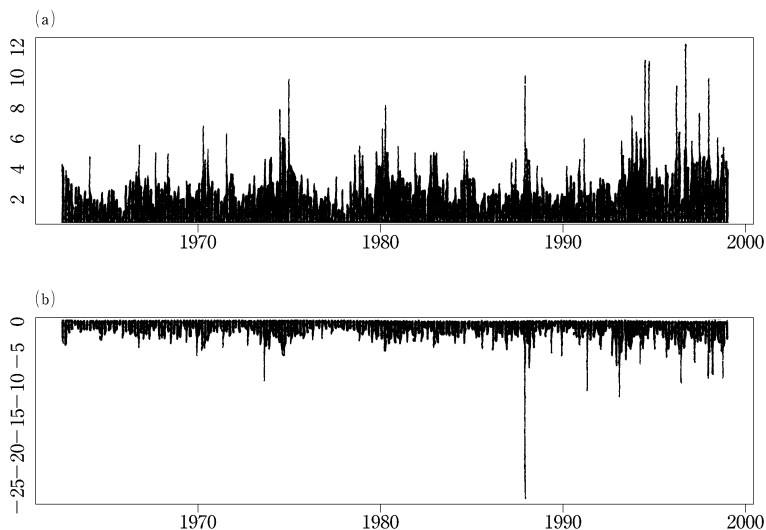
EVT については、たとえば、ダニエルソン・森本 (2000)、森本 (2000)、山井・吉羽 (2002)、牧本 (2004)、極値に関しては、たとえば、Embrechts et al. (1997)、EVT の系列依存性の拡張については、たとえば、Leadbetter et al. (1983) を、それぞれ参照。

4.2 推定法の例

異常値の分布は 3 つのパラメータ k 、 β_n 、 α_n を含み、それぞれ形、位置、スケールを表す。推定法にはパラメトリック・アプローチ、ノンパラメトリック・アプローチがあり、推定値は標本期間 n に依存する。前者には最尤法、回帰法などがあり、後者には Hill (1975) および Pickands (1975) などの推定法がある。

いま q を正の整数とするとときシェイプ・パラメータ k の Hill 推定法は

図4 IBM株価の日次対数収益率（(a)正值, (b)負値）



(出典：Tsay (2002))

表2 IBM株価の日次対数収益率のHill推定値

q	190	200	210
Maximum	-0.300(0.022)	-0.297(0.021)	-0.303(0.021)
Minimum	-0.290(0.021)	-0.292(0.021)	-0.289(0.020)

(出典：図4と同じ)

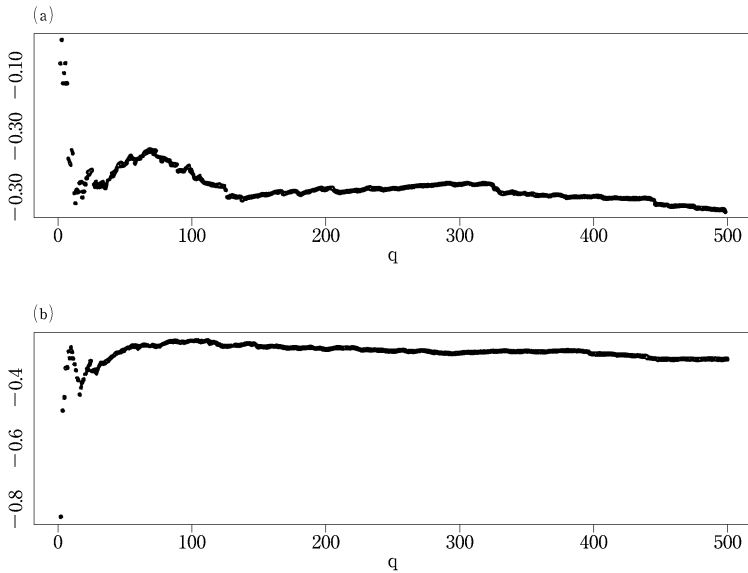
$$k_h(q) = \left(-\frac{1}{q}\right) \sum_{i=1}^q \{ \ln[-r_{(i)}] - \ln[-r_{(q+1)}] \}$$

で与えられる。(q)はqによる推定量を表している。qはHillおよびPickandsにより異なるが前者は効率的という議論がある。

(IBM株価収益率とHill推定量)

Tsay (2002)はEVTをIBM株価の日次対数収益率に適用している。期間は1962.6.3から1998.12.31で標本数は9190である。図4は最大部分と最小部分を

図5 IBM 株価の日次対数収益率 Hill 推定値 ((a)右裾野, (b)左裾野)



(出典：図4と同じ)

表したもので、1987年10月のクラッシュが明らかである。そこでこの値を除き、対数収益率は0.5%から13%の範囲とする。

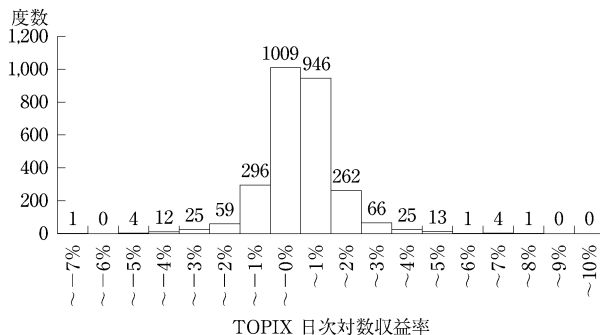
表2はHill推定量で、結果は比較的安定している。図5は q に対応する $k_n(q)$ の散布図で q が小のとき以外は安定している。シェイプ・パラメータはほぼ -0.30 となり5%水準で0とはいえない。負の異常値についてシェイプ・パラメータ k は小さく、左側の裾野が重いことを示している。総じて分布はフレシェ族に属しているといえることから正規性の仮定は否定される。この結論はLongin(1996)にもみられる。

標本を1カ月($n=21$)から1年($n=252$)の場合について最尤法を適用した結果をTsayは次のように要約している。

- 位置、スケール・パラメータ β_n 、 α_n は n の増加とともに増大する
- 形のパラメータは $n \geq 63$ で負の異常値でほぼ安定、ただし、正の異常値

表3 TOPIX データの基本統計量（左表）およびヒストグラム（右グラフ）

データ数	2,725
平均	-0.017%
最小値	-7.365%
最大値	9.125%
標準偏差	1.204%
歪度	0.3491
尖度	8.6762
A R (1)	0.1039

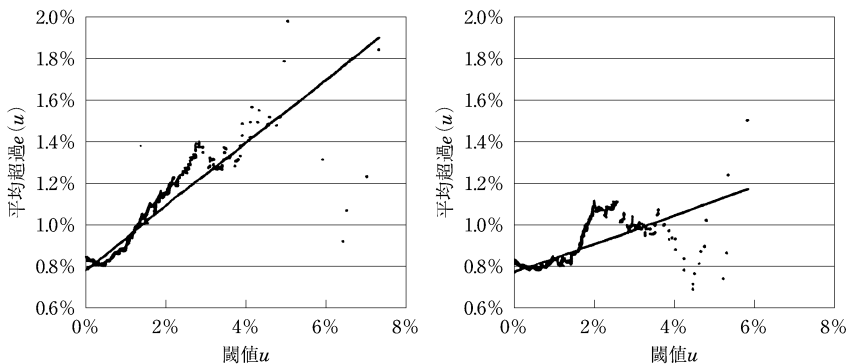


TOPIX 日次対数収益率

TOPIX 日次対数収益率

(出典：森本（2000）)

図6 TOPIX の平均超過プロット



(左：分布の右裾，右：分布の左裾)

(出典：表3と同じ)

で不安定

というもので、これについても Longin の結論と類似していると述べている。

(TOPIX への応用例)

森本（2000）は TOPIX 日次収益率（1988—1998）について検討している。基本統計量とヒストグラムは表3でファットテイルの可能性がうかがわれる。こ

ここで横軸に閾値、縦軸に実測値を用いた平均超過プロットを正規分布、指数分布、一般パレート分布についてみると図6のようになり裾野の厚さがみられる。

4.3 EVTアプローチによる VaR 推定

EVT を用いて VaR を推定する方法について、Longin (1999a) の 8 ステップによる方法を 2 つの部分に分けてみると、Part 1 ではパラメータの推定、Part 2 では期間による確率から VaR を考えている。

(Part 1)

資産収益率の観測期間 T を重複しないで n 期を g 個に分け $T=ng$ とする。 $T=ng+m$ ($1 \leq m < n$) のとき最初の m 個は標本から除く。EVT から期間 $\min\{r_{ni}\}$ における位置、大きさ、シェイプパラメータ β_n , α_n , k_n が推定できる。 $x=(r-\beta_n)/\alpha_n$ を (4.2) 式の CDF の最尤推定量に代入して一般化分布の確率の分位を得る。 p^* をロングポジションの潜在的損失の確率、 r_n^* を分布の区分期間の p^* 分位とすると

$$r_n^* = \begin{cases} \beta_n - (\alpha_n/k_n) \{1 - [-\ln(1-p^*)]^{kn}\} & k_n \neq 0 \text{ のとき} \\ \beta_n + \alpha_n \ln[-\ln(1-p^*)] & k_n = 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (4.3)$$

を得る。応用においては $k_n \neq 0$ に注目する。

(Part 2)

下側確率 p^* を与えて (4.3) 式の分位 r_n^* は EVT に基づく分割期間における VaR である。次のステップは分割期間と収益率 r_t との関係进行を明らかにすることである。

収益率の多くは系列相関はないか、あるいは小さいと仮定しているから (4.1) 式の関係を利用して

$$p^* = P(r_{ni} \leq r_n^*) = 1 - [1 - P(r_t \leq r_n^*)]^n$$

あるいは

$$1 - p^* = [1 - P(r_t \leq r_n^*)]^n \quad (4.4)$$

を得る。これは収益率 r_t の VaR を得るための確率のあいだの関係を示す。いわば、小さな下側確率 p については (4.4) 式により p^* が得られると r_t の p 分位は r_n^* であることを示している。ここで確率 $p = P(r_t \leq r_n^*)$ である。このとき小さな確率 p に対して VaR は

$$\text{VaR} = \begin{cases} \beta_n - (\alpha_n/k_n) \{1 - [-\ln(1-p)]^{k_n}\} & k_n \neq 0 \text{ のとき} \\ \beta_n + \alpha_n \ln[-\ln(1-p)] & k_n = 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (4.5)$$

となる。

VaR 計測のために伝統的な EVT を適用する方法を要約すると次のようになる。

- (1) 標本期間 n を選び、 $g = T/n$ のとき分割期間 $\{r_{ni}\} (i=1, \dots, g)$ を得る
- (2) 最尤推定量により β_n, α_n, k_n を推定
- (3) 推定結果を検定
- (4) 検定結果が妥当のとき (4.4) 式により VaR を計測。

VaR に関する議論は多く、確率によっても VaR は大きく変わる。EVT の観点から見れば J. P. Morgan が提案した VaR 計測の RiskMetrics の方法は極値理論の特殊な場合といえる。

(IBM 株価収益率と EVT の試算例)

1962.6.7から1998.12.31の IBM 株価日次対数収益率について Tsay (2002) の試算は、 $n=63$ のとき $\alpha_n=0.945$, $\beta_n=-2.583$, $k_n=-0.335$ である。左側確率0.01のとき VaR は -3.04969 であるから、10万ドル・ロングのとき

$$10\text{万ドル} \times 0.0304969 = 304,969 \text{ドル}$$

となる。確率0.05のとき166,641ドルである。

ほぼ1カ月のときで $n=21$ の場合は、 $\alpha_n=0.823$, $\beta_n=-1.902$, $k_n=-0.197$ で、異常値分布の1%分位では -3.40013 となる。

これらの結果は GARCH (1,1) を用いた3.2における例の場合より小さく、分位による推定例より小さい。これは確率の選び方によるもので、0.1%のときには AR(2)-GARCH(1,1) で546,641ドル、ETVで666,590ドルとなる。

ただし、ここでは対数収益率に独立性を仮定していること、分割区間ではボラテリテイが集中することがあることから適切とはいえない（たとえば Tsay (2002) の提案を参照）。

（EVT と GARCH による VaR 比較の例）

ダニエルソン・森本（2000）は収益率分布の特性をリスクの観点からとらえるために

- (1) ファット・テール性（非正規性として裾野の厚さ）
- (2) ボラテリテイのクラスタリング（不均一分散の大きい時期と小さい時期がある）
- (3) 極値のクラスタリング（収益率の極値の発生にはムラがある）
- (4) 分布の非対称性（左裾と右裾の厚さが異なる）

に注目し、リスク計測モデルとして EVT と GARCH モデルの結果を比較している。

GARCH モデルではボラテリテイのクラスタリングを取り入れること、残差に t 分布を仮定してファット・テール性を表現できる。一方、EVT は分布の裾の形状をモデル化してファット・テール性と非対称性を取り入れることができる。

そこでまず分布の中心の高さおよび裾野の厚さと収益率の推移においてボラテリテイが高い時期と低い時期があるかどうかを検討している。

EVT は極値の振る舞いに注目するため確率変数の裾野部分のモデル化が試みられる。東証の TOPIX および 2 部株価指数、米国の S & P500、ドル・円為替レートなどに適用した結果のうち TOPIX の VaR のボラテリテイは表 4 で、正規 GARCH の推定精度は高くないこと、EVT では比較的小さなレンジにあること、両 GARCH モデルでは VaR が時間を通じて大きく変動すること、EVT ではバイオレーションのクラスタリングが発生していること、両 GARCH モデルでは収益率の大幅な変動に対して VaR が過剰に反応していることがみられる。また表 5 は実際の収益率が VaR を超過するバイオレーション

表4 TOPIXにおけるVaRのボラテリテイ

データ／モデル		観測開始日	観測終了日	平均値	標準誤差	最小値	最大値
日次損益		7/29/1954	7/30/1999	3	85	-1,581	912
VaR	正規 GARCH			-171	104	-2,828	-59
	GARCH- t			-186	109	-2,230	-65
	EVT			-220	70	-394	-103
日次損益		1/4/1996	7/30/1999	-1	120	-525	660
VaR	正規 GARCH			-264	91	-756	-143
	GARCH- t			-290	92	-713	-175
	EVT			-325	21	-394	-290
日次損益		1/4/1996	3/31/1999	26	118	-241	370
VaR	正規 GARCH			-259	64	-412	-180
	GARCH- t			-279	61	-421	-204
	EVT			-318	3	-331	-309
日次損益		4/1/1999	6/30/1999	18	100	-201	660
VaR	正規 GARCH			-257	37	-357	-202
	GARCH- t			-282	40	-384	-223
	EVT			-317	3	-319	-309

注：数値は万円。1億円のポートフォリオに対する日次の損益額を示している。GARCH- t はノイズが t 分布にしたがうと仮定したモデル。

（出典：ダニエルソン・森本（2000））

ンの頻度で、GARCHモデルの推定精度が低いこと、両GARCHモデルは左裾と右裾のバイオレーション頻度が大きく異なることがみられる。総じて推定の精度や時間的な安定性ではEVTがすぐれている。

EVTに関しては新たなアプローチも提案されている。たとえばTsay（2002）は2次元ポアソン過程モデルを適用してVaRを推定した例を挙げている。また森本（2000）は金融と保険のリスクを融合する可能性をもつ理論としてEVTを挙げている。

4.4 リスク計測手法としてのEVTの問題点

EVTの実用化においては多次元確率変数への応用が困難であること、推計には多くのサンプルを要することなどが指摘されている（日本銀行（2000））。こ

表5 VaRを超過したデータ発生率（バイオレーション率）の比較

モデル	データ	左裾		右裾	
		95.0%	99.0%	95.0%	99.0%
正 規	TOPIX	4.50%	1.98%	4.10%	1.59%
	SP500	5.13%	1.96%	4.81%	1.66%
	JPY/USD	5.65%	2.50%	5.15%	2.09%
	WTI	5.08%	1.98%	4.80%	1.90%
	TSE2	4.76%	2.04%	5.06%	1.86%
正規 GARCH	TOPIX	5.14%	1.65%	4.05%	1.05%
	SP500	5.47%	1.81%	4.30%	0.99%
	JPY/USD	5.57%	2.12%	4.90%	1.50%
	WTI	5.04%	1.71%	4.40%	1.43%
	TSE2	5.25%	1.82%	4.34%	1.22%
GARCH- <i>t</i>	TOPIX	5.80%	1.25%	4.44%	0.71%
	SP500	6.01%	1.28%	4.62%	0.71%
	JPY/USD	6.26%	1.34%	5.23%	0.86%
	WTI	6.27%	1.15%	4.68%	0.99%
	TSE2	5.39%	1.29%	4.76%	0.89%
EVT	TOPIX	5.23%	1.18%	5.38%	1.30%
	SP500	5.61%	1.27%	5.55%	1.27%
	JPY/USD	5.51%	1.31%	6.43%	1.53%
	WTI	5.08%	0.87%	5.32%	1.23%
	TSE2	5.45%	1.23%	5.75%	1.38%

注：チェックした VaR の数は TOPIX=12,679, SP500=11,133, JPY/USD=3,593, WTI=2,521, TSE2=6,666。

（出典：表4と同じ）

のために分散・共分散法を用いて多次元確率変数に応用することも提案されている。しかし、分布の正規性を前提とした分散・共分散法を用いることは理論的に矛盾している。また、多変量極値分布としてのコピュラ（後記5.4.1）の応用も考えられるが、理論的、実証的研究は今後の課題とされている。

このために、イベントを想定し、価格変動のストレス・シナリオによる分析に EVT を応用することにより VaR を補完するかたちで活用できるといえる。

5 期待ショートフォール

VaRは分布の裾野に関する重要な情報を見落とす可能性のあること、また、劣加法性を満たさないことから山井・吉羽（2001a, b, 2002）は VaR と期待ショートフォールのテイル・リスクの比較を行い VaR のリスク指標としての妥当性を検討している。

5.1 期待ショートフォールの考え方

期待ショートフォール（expected shortfall）は標準的なリスク指標である VaR に代わるリスク指標として提案されているもので、損失額が VaR 以上となることを条件とした損失額の条件付期待値で、損益額分布の損失部分のみを考慮する下方リスク指標といえる。

いま、ポートフォリオの損益額を確率変数 X 、信頼水準 $100(1-\alpha)\%$ の VaR を $VaR_\alpha(X)$ とするとき、期待ショートフォール $ES_\alpha(X)$ を

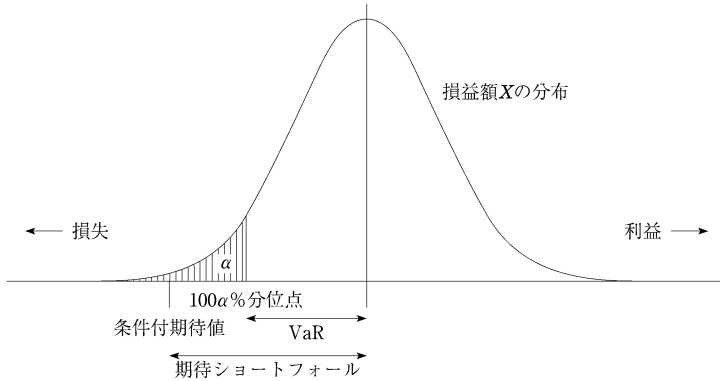
$$ES_\alpha(X) = E[-X | -X \geq VaR_\alpha(X)]$$

とする。ここで $E[x|B]$ は事象 B が成立する条件のもとでの確率変数 x の期待値である。VaR を超える範囲では損益額は負値であることから $-X$ は正值である。すなわち、損失が VaR を超える場合に平均的にどの程度の損失を被るかを表している。

5.2 VaR と期待ショートフォールの比較

図7は山井・吉羽（2001a）による VaR と期待ショートフォールの比較で、ここでは期待ショートフォールを実際に応用する場合には推計上の問題があることを示している。分布の裾の推計には極値理論の利用も考えられている（たとえば、Neftci（2000））。そこで実務上のインプリケーションとして次の点を示している。

図7 損益額分布、VaR と期待ショートフォール



（出典：山井・吉羽（2001a））

- (1) 損益額が正規分布に従わない場合にはリスクを単一の指標で表すことはできないことで、たとえば、小さい確率で大幅な損失が発生するような資産をポートフォリオに含むような場合である。したがってポートフォリオの特性を踏まえて VaR の危険性に注意すること
 - (2) 信頼区間外で大幅な損失が生じるポジション運営が投資家に与える影響を考慮し、VaR とは別の管理手法を考慮する
 - (3) 大規模な損失が企業に大きな負担を強いると考えれば、過剰なテイル・リスクを有するポートフォリオ持たないためにストレス・テストを利用する
- などで、これらはシナリオ分析による計量分析の必要性を示している。

5.3 期待ショートフォール推計の問題点

期待ショートフォールのテイル・リスクは複数のポートフォリオ間の相対的なリスクの大小関係を見誤っているときに発生すると考えられる、たとえば、オプション・ポートフォリオにおける Danielsson (2001) の分析、与信ポートフォリオにおける Lucas et al. (2001) などの分析があるが、山井・吉羽

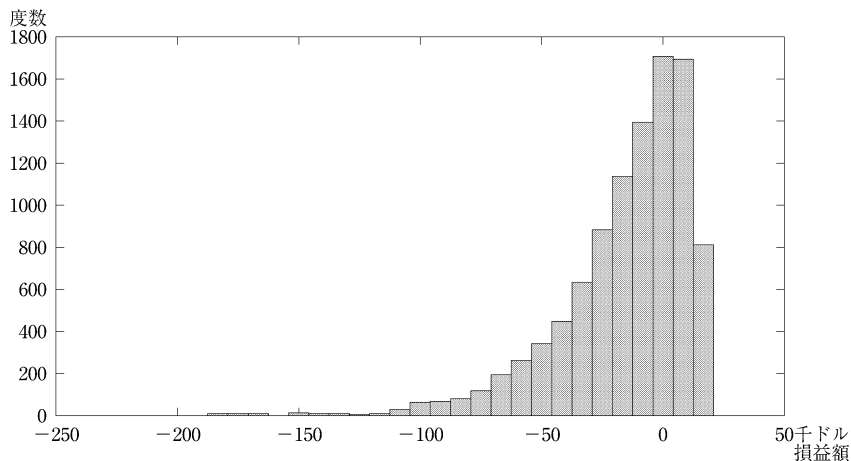
表6 オプション・ポートフォリオ

	満期までの 期間(日)	ストライク (米ドル)	価 格 (オプション・プ レミアム, ドル)	投資金額 (千米ドル)	ポジション (千枚)
GE 株式	—	—	49-13/16	1,000	20.1
マクドナルド株式	—	—	31-1/4	1,000	32.0
インテル株式	—	—	42-1/32	1,000	23.8
GE 株コール・オプション	18	50.00	2	-100	-50.0
マクドナルド株コール・オプション	18	30.00	1-3/4	-100	-57.1
インテル株コール・オプション	18	40.00	3-1/2	-100	-28.6

備考：価格（2000年11月28日時点）はブルームバーグ社から取得。

（出典：山井・吉羽（2001c））

図8 サンプル・ポートフォリオの損益額分布（シミュレーション回数10,000回）

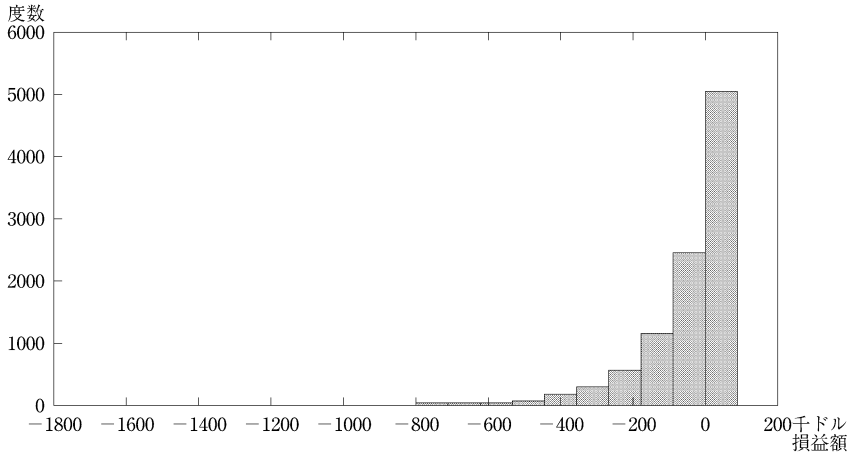


備考：このグラフでは、本文の表記とは異なり、利益をプラス、損失をマイナスとして損益額をとっている。

（出典：山井・吉羽（2001c））

（2001c）は推計値の安定性を考察するために表6に示した米国株のポートフォリオとしてGE,マクドナルド、インテルの3銘柄と、これらを原資産とする個別株オプションのポートフォリオについてVaRと期待ショートフォールをシ

図9 ファー・アウトのオプション・ポートフォリオの損益額分布
（シミュレーション回数10,000回）



備考：このグラフでは、本文の表記とは異なり、利益をプラス、損失をマイナスとして損益額をとっている。
（出典：図8と同じ）

表7 オプション・ポートフォリオの VaR および期待ショートフォールの推計結果
（信頼水準95%）

シミュレーション回数	リスク指標	推計値の 平均値(a)	推計値の 標準偏差(b)	相対標準偏差 (c)=(b)/(a)	推計値の 信頼区間(95%)
1,000回	VaR	68.33	3.34	0.0489	[61.72 75.03]
	期待ショートフォール	91.20	4.63	0.0508	[82.44 100.30]
10,000回	VaR	68.18	1.05	0.0154	[66.10 70.22]
	期待ショートフォール	91.56	1.38	0.0151	[88.97 94.26]
100,000回	VaR	68.15	0.33	0.0049	[67.51 68.81]
	期待ショートフォール	91.57	0.46	0.0050	[90.73 92.50]

（出典：山井・吉羽（2001c））

シミュレーションにより計測している。図8はポートフォリオの損益額のヒストグラムで損益額分布が大きく左に歪んでいる。

表7は推計結果で相対標準偏差はほぼ同水準である。一方、アウト・オブ・

表8 ファースト・アウトのオプション・ポートフォリオの VaR および
期待ショートフォールの推計結果（信頼水準95%）

シミュレーション回数	リスク指標	推計値の 平均値(a)	推計値の 標準偏差(b)	相対標準偏差 (c)=(b)/(a)	推計値の 信頼区間(95%)
1,000回	VaR	334.62	22.01	0.0658	[293.70 380.86]
	期待ショートフォール	500.46	35.00	0.0699	[433.38 571.32]
10,000回	VaR	332.56	7.06	0.0212	[318.53 346.88]
	期待ショートフォール	502.01	11.17	0.0222	[481.57 524.05]
100,000回	VaR	332.26	2.15	0.0065	[328.14 336.70]
	期待ショートフォール	502.19	3.45	0.0069	[495.53 509.05]

（出典：表7と同じ）

ザ・マネーの場合には図9，表8のように期待ショートフォールの推計値が不安定化している。この場合にはより多くのシミュレーションが必要であることを示している。

また，山井・吉羽（2001c）は大幅な損失が発生する可能性の高いポートフォリオの期待ショートフォールが小さくなる場合にテイル・リスクが発生する可能性を考慮して分析している。表9は期待値97.05を初期投資額としたサンプル・ポートフォリオA，Bの場合である。このとき表10に示すように，

ポートフォリオA：損失が10を下回る確率 99.0%

ポートフォリオB： 99.5%

であるが

ポートフォリオA： 1%の確率で47.05の損失

ポートフォリオB：約0.5%の確率で77.05の損失

の可能性を示している。これらのリスク・プロファイルは表9でポートフォリオBがより望ましいと判断される。しかし，期待効用の仮定によって期待ショートフォールは期待効用最大化原理との整合的ではない。また，ポートフォリオBでは大きな損失の確率が小さいために期待ショートフォールはリスクが小さいと判断するテイル・リスクが発生している。

表9 サンプル・ポートフォリオのベイ・オフ

ポートフォリオ A			ポートフォリオ B		
ベイ・オフ	損失額	確率	ベイ・オフ	損失額	確率
100	-2.95	50.000%	98	-0.95	50.000%
95	2.05	49.000%	97	-0.05	49.000%
50	47.05	1.000%	90	7.05	0.457%
			20	77.05	0.543%

注：ポートフォリオ B のベイ・オフが90および20となる確率は四捨五入されており正確な値では表示されていない（実際には、これら2つの事象の確率が1%で、ポートフォリオのベイ・オフの期待値が97.05となるよう設定）。

（出典：山井・吉羽（2001c））

表10 サンプル・ポートフォリオの期待ショートフォールと VaR

	ポートフォリオ A	ポートフォリオ B	備 考
ベイ・オフの期待値	97.050	97.050	期待値は同じ
VaR（信頼水準99%）	47.050	7.050	VaR は A が大
期待ショートフォール（信頼水準99%）	47.050	45.050	期待ショートフォールは A が大

（出典：表9と同じ）

5.4 多変量極値分布のもとでの期待ショートフォール

5.4.1 コピュラと多変量極値理論

周辺分布が $[0,1]$ 上の一様分布に従う2つの確率変数 U_1, U_2 に対して分布関数

$$C(u_1, u_2) = Pr[U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2]$$

をコピュラ関数という。ここで一様分布に従う2つの確率変数の周辺分布関数 $F_1(x_1), F_2(x_2)$ により2変量の分布関数 $F(x_1, x_2)$ を

$$C(F_1(x_1), F_2(x_2)) = F(x_1, x_2)$$

により生成する。Sklarの定理はこの逆も成立することを示している。コピュラは同時分布から相互依存関係を抽出し、相互依存関係と周辺分布の挙動とを分離するための一つの手法を与える。

多変量極値理論を2変数の場合について考えると、2変量の確率変数の超過値を考察することになる。いま、2つの確率変数を $Z=(Z_1, Z_2)$ 、閾値を $\theta=(\theta_1, \theta_2)$ とするとき

$$m_{(\theta_1, \theta_2)}(Z_1, Z_2) = (\max((Z_1, \theta_1), \max((Z_2, \theta_2)))$$

で定義する。閾値を大きくするときこの超過値のコピュラは極値コピュラに収束する (Ledford-Tawn (1996))。極値コピュラの条件を満たす極値コピュラは無数に存在するとされ、その中から選択することになるが統計学や金融ではガンベル・コピュラ

$$C(u_1, u_2) = \exp\{-[(-\log u_1)^\alpha + (-\log u_2)]^{1/\alpha}\}$$

を利用することが多い。ガンベル・コピュラの長所として、各周辺分布が独立の場合と依存している場合を包含していること、単一のパラメータ α で依存関係を表すことができること、が挙げられている。 α はガンベル・コピュラの依存パラメータと呼ばれる。極値コピュラは複数の確率変数の超過値や依存関係を分析する場合に応用される。

5.4.2 多変量極値分布のもとでの VaR と期待ショートフォール

山井・吉羽 (2002) は市場ストレス時の価格変動を多変量極値分布によって表現されると考え、数値シミュレーションと市場データにより分析している。

まず、日米英とエマージング18カ国の対米ドル為替レート (1993.11.1—2001.10.29) を用いて単変量により分析し、さらに東南アジアの5通貨について多変量による分析を示している。

2変量超過値の周辺分布は一般化パレート分布に従い、コピュラはガンベル・コピュラと仮定する。このとき超過値の割合を所与としたときの周辺分布の裾指数 (ξ_1, ξ_2)、スケール・パラメータ (σ_1, σ_2)、閾値 (θ_1, θ_2)、ガンベル・コピュラの依存パラメータ (α) により超過値の同時分布が推定される。超過値の割合を10%としたときの結果の例は表11である。これらをもとにシミュレーションにより VaR と期待ショートフォールの依存度合いを推定した。そのうち、シンガポール、フィリピン、タイの例が表12で、VaR のテイル・

表11 東南アジア通貨の日次対数変化率の依存関係の2変量極値分布による推計結果（例）

通貨		α	ξ_1	σ_1	θ_1	ξ_2	σ_2	θ_2
フィリピン(ペソ)	シンガポール(ドル)	1.3120	0.4156	0.0046	0.0035	0.3256	0.0020	0.0028
フィリピン(ペソ)	タイ(バーツ)	1.4267	0.4156	0.0046	0.0035	0.4298	0.0051	0.0035
シンガポール(ドル)	タイ(バーツ)	1.4364	0.3256	0.0020	0.0028	0.4298	0.0051	0.0035

備考：為替レートデータのデータはブルームバーグから取得した。対象期間は、1993年11月1日～2001年10月29日までの8年間である。

この結果は分布の右裾の推計結果である。超過値の割合は $p_1=p_2=0.1$ とした。

（出典：山井・吉羽（2002））

表12 為替レート変動の和の VaR と期待ショートファール(ES) の計算結果（例）

通貨：フィリピン（ペソ）、シンガポール（ドル）

$\alpha=1.312$

	VaR(95%)	VaR(99%)	ES(95%)	ES(99%)
フランク	0.01043	0.02497	0.02116	0.04533
正規	0.01047	0.02588	0.02179	0.04721
ガンベル	0.01035	0.02720	0.02288	0.05150

通貨：フィリピン（ペソ）、タイ（バーツ）

$\alpha=1.427$

	VaR(95%)	VaR(99%)	ES(95%)	ES(99%)
フランク	0.01455	0.03650	0.03066	0.06663
正規	0.01440	0.03802	0.03185	0.07172
ガンベル	0.01395	0.03992	0.03366	0.07996

通貨：シンガポール（ドル）、タイ（バーツ）

$\alpha=1.436$

	VaR(95%)	VaR(99%)	ES(95%)	ES(99%)
フランク	0.01114	0.02754	0.02344	0.05152
正規	0.01114	0.02882	0.02427	0.05428
ガンベル	0.01102	0.03037	0.02549	0.05885

（出典：表11と同じ）

リスクの大きいことが示されている。

これらの結果は一般化パレート分布のもとで VaR あるいは期待ショートファールがリスクを適切に表現できないことがあることを示している。VaR と

期待ショートフォールのリスクは、分布の裾野指数、スケールパラメータ、超過値の割合、信頼水準、損失の依存関係などのさまざまな条件の相互作用によって発生すること、また、極値理論では VaR にテイル・リスクの発生すること、リスク管理では単一指標の算出を最終目的とすることについての問題点を示している。

6 モデル・リスク

モデルにより計量的に分析を進めることに関するモデル・リスクは、とくに金融商品の価格付けモデルで強調されている。たとえば、LTCM (Long-Term Capital Management) におけるクレジット・スプレッド取引における大幅な損失である。モデル・リスクは主として、市場価格を的確に表現できないモデルを使うことによる損失を被るリスクとリスク計測モデルにおいて将来被る損失の可能性を誤って評価するリスクにおいて考えられ、VaR は後者の例である。

モデル・リスクはモデルの仮定の誤り、推定の誤り、近似手法から生じる誤差、などがあり、リスク計測モデルにおいてはさらに分布の仮定の誤り、市場データの不適当な選択なども挙げられる。もっとも実務的な対応としては、組織、権限、人材などの管理体制の問題があるが、定量的な対応としてはさまざまなシナリオを想定した分析も必要となる（モデル・リスクについては加藤・吉羽（2000）参照）。

7 今後の課題

リスク管理は冒頭に述べたように広範囲な問題である。リスクをどのようにとらえるかというリスク認識、それにどう評価するかというリスク分析、そしてどう対処するかというリスク管理などを考慮することになり、多様な分析方

法も提案されている。本稿ではファイナンスの分野で市場リスクに関する標準的な手法といわれる VaR とそれを補完する計量的な方法について、近年における実証分析の方法の基本的な部分を述べている。この分野の分析方法は現在なお進展しておりさらに検討することも要求される。

もとよりファイナンシャル・リスクは市場リスクのほかに信用リスク、流動性リスク、オペレーショナル・リスクなどについて考察することも重要であり、本章で触れたようにモデル分析の場合にはモデルの持つリスクもある。また、高頻度データの利用は新たな観点から計量分析の方法を求めている。本章は市場リスクの分析に関する出発点として考察している。

参考文献

- 安藤美孝「ヒストリカル法によるバリュエーション・リスクの計測：市場価格変動の非定常性への実務的対応」『金融研究』日本銀行金融研究所 2004
- 安藤美孝「与信ポートフォリオの信用リスクの解析的な評価方法：極限損失分布およびグラニュラリティ調整を軸に」『金融研究』日本銀行金融研究所 2005
- 大澤真、村永淳「市場リスク算出の枠組みにおける流動性リスクの計測」IMES Discussion Paper 98-J-2 日本銀行金融研究所 1998
- 小田信之「金融リスクの計量分析」朝倉書店 2001
- 加藤敏康・吉羽要直「モデル・リスクとそれへの対応」『金融研究』日本銀行金融研究所 2000
- ダニエルソン、ジョン、森本祐司「市場リスクの予測について—EVTとGARCHモデルを用いたVAR算定の比較分析」『金融研究』日本銀行金融研究所 2000
- 浪花貞夫「ファイナンシャル・エコノメトリックスの進展(2)—ボラティリティの計測」立命館経済学 2007a
- 浪花貞夫「ファイナンシャル・エコノメトリックスの進展(3)—リスク分析：異常値とVaR」立命館経済学 2007b
- 日本銀行金融研究所「バリュエーション・リスク (VaR) の算出とリスク／リターン・シミュレーション」日本銀行月報46(4) 1995
- 日本銀行金融研究所「FEワークショップの模様—リスク計量に関する新たな取り組み」『金融研究』 2000
- 牧本直樹「極値理論—極値事象のモデリングと評価」応用経済時系列研究会チュートリアルセミナー資料 2004

- 森本祐司「金融と保険の融合について」『金融研究』日本銀行金融研究所 2000
- 山井康浩, 吉羽要直「バリュー・アット・リスクのリスク指標としての妥当性について—理論的サーベイによる期待ショートフォールとの比較分析」『金融研究』日本銀行金融研究所 2001a
- 山井康浩, 吉羽要直「リスク指標の性質に関する理論的整理—VaRと期待ショートフォールの比較分析」『金融研究』日本銀行金融研究所 2001b
- 山井康浩, 吉羽要直「期待ショートフォールによるポートフォリオのリスク計測」『金融研究』日本銀行金融研究所 2001c
- 山井康浩, 吉羽要直「市場ストレス時におけるVARと期待ショートフォールの比較：多変量極値分布のもとでの比較分析」『金融研究』日本銀行金融研究所 2002
- Anderson, T. G. and Bollerslev, T. “Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models Do Provide Accurate Forecasts” IER 1998
- Anderson, T. G. and T. Bollerslev and S. Lange. “Forecasting Financial Market Volatility: Sample Frequency vis-à-vis Forecast Horizon” J. of Empirical Finance 1999
- Artzner, P., F. Delbaen, J. M. Eber, and D. Heath, “Thinking Coherently” RISK 1997
- Artzner, P., F. Delbaen, J. M. Eber, and D. Heath, “Coherent Measures of Risk” Mathematical Finance 1999
- Barndorff-Nielsen, O. E. and N. Shephard, “Econometric Analysis of Realized Volatility and Its Use in Estimating Stochastic Volatility Models” J. of Royal Stat. Soc. B64 2002
- Bollerslev, T. “Modelling the Coherence in Short-run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Model” Review of Economics and Statistics 1990
- Campbell, J. Y. and L. Hentschel, “No News is Good News, An Asymmetric Model of Changing Volatility in Stock Returns” J. of Financial Economics 1992
- Cox, D. R. and D. V. Hinkley “Theoretical Statistics” Chapman-Hall 1974
- Cumperayot, P. J., J. Danielsson, B. N. Jorgenson, and C. G. de Vries, “On the Relevancy of Value-at-Risk Regulation”, Measuring Risk in Complex Stochastic Systems, Springer 2000
- Danielsson, J. “The Emperor Has No Clothes: Limits to Risk Modelling” LSE 2001
- Ebens, H. “Realized Stock Volatility” John Hopkins Univ. 1999
- Embrechts, P., C. Kuppelberg and T. Mikosch, “Modelling External Events” Springer 1997

- Gnedenko, B. V. "Sur la distribution limited u terme maximum of d'une seriealeator-
ie" *Annals of mathematics* 1943
- Hill, B. M., "A simple general approach to inference about the tail of a distribution"
A. of Stat. 1975
- Hol, E, M, J, H. "Empirical Studies on Volatility in International Stock Markets"
Kluwer AP 2003
- Jenkinson, A. F. "The frequency distribution of the annual maximum (or minimum)
of meteorological elements" *Quarterly J. of the Royal meteorological Soc.* 1955
- J. P. Morgan "RiskMetrics" Reuters 1996
- Koenker, R. W. and G. W. Bassett "Regression quantiles" *Econometrica* 1978
- Leadbetter, M., G. Lindgren and H. Rootzen. "Extremes and Related Properties of
Random Sequences and Processes" Springer 1983
- Ledford, A. W. and J. A. Tawn, "Statistics for Near Dependence in Multivariate Ex-
treme Value", *Biometrika* 1996
- Longin, F. M. "The asymptotic distribution of extreme stock market returns", *J. of
Business* 1996
- Longin, F. M. "Optimal Margin level in futures markets : Extreme price movements"
The Journal of Futures Markets 1999a
- Longin, F. M. "From value at risk to stress testing : The extreme value approach"
Center for Economic Policy Reserch, London 1999b
- Lucas, A. A. P. Klaassen, P. Spreij and S. Straetmans "An Analytic Approach to
Credit Risk of Large Corporate Bond and Loan Portfolios" *J. of Banking and
Finance* 2001
- Martens, M. "Measuring and Forecasting S&P 500 Index-Futures Volatility Using
High-Frequency Data" *J. of Futures Markets* 2002
- Neftci, S. N., "Value at Risk calculations Extreme Events and Tail Estimation", *J. of
Derivatives* 2000
- Nelson, D. B. "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns :: A New Approach"
Econometrica 1991
- Pickands, J. "Statistical inference using extreme order statistics", *Annals of Statistics*
1975
- Taylor, S. J. "Modelling Financial Time Series" John wiley and Sons 1986
- Tsay, R. S. " Analysis of Financial Time Series — Financial Econometrics" Wiley &
Sons 2002