

ファイナンシャル・エコノメトリックスの進展 (3)

——リスク分析：異常値と VaR ——

浪花貞夫

ファイナンスの分野で直面するきわめて多様なリスクを認識して客観的に数値化し、予測しながらリスク管理を進めることは実務家にとって基本的な態度として要求される。しかし一方、小田(2001)が指摘するように、金融リスク管理はリスクの計測に限定されるのではなく、組織行動論や企業戦略論などに広くまたがる多面的な問題であり、目的に合致したリスク分析を実行し、最終的な経営判断に活用していく姿勢が重要である。リスク計量では唯一完全な方法が存在するわけではなく、方法の持つ限界を明確に認識したうえで実務に適用することが要求される。これらを網羅的に取り上げることは本稿の目的を超えるので、以下では金融取引にともなうリスク計量の基礎を考察する。

3. 1 金融リスク

金融リスクは小田(2001)にしたがうと、保有する金融資産(負債)の価値が、予測不可能な将来の出来事の結果として現在の価値から大きく減少(増加)する可能性である。この場合に発生するのは金融取引にともなうリスクであり、大別して、市場リスク、信用リスク、流動性リスク、資金繰りリスク、オペレーショナル・リスク、その他のリスクが挙げられる。これらのうち計量分析の対象として広くモデル化が試みられている基本的なものに、市場リスク、信用リスクそして流動性リスクがある。

3. 2 市場リスク(マーケット・リスク)

金融市場において異常な価格動向がみられるのは稀であるとしても、それを含めて市場価格の変動により金融資産の価値が変動する可能性を市場リスクという。ここで市場価格には、金利、証券価格、為替レート、株価、商品価格などが含まれる。市場価格の変動は、たとえば、1987年10月のNY株式市場の株価下落やLTCMの破綻、それらにともなう当局の規制なども金融市場に影響を与える。また、たとえば新たな技術関連株の頻繁な価格変動は、市場リスクの管理において新たな尺度を求めることになる。

市場リスクの分析における代表的なアプローチに、感応度分析、バリュー・アット・リスク(VaR)、シナリオ分析、ストレステストがある。

感応度分析は、市場価格の変動が金融資産に対するリスク源泉となることから価格変動をリスクファクターとしてとらえ、それが単位当たり変化したときの資産価格の変化する度合いを感応度(sensitivity)と呼び、それを分析する。感応度のとらえかたも対象資産やモデルによりさまざまである。

バリュアット・リスク (VaR: Value at Risk) は、金融資産を一定期間保有する場合に、一定の信頼区間のもとで統計的に評価された最大損失額を表す。VaR を算定するために、感応度のほかにリスクファクターの変動可能性 (ボラティリティ) や相関の推定値が利用される (次節参照)。

シナリオ分析、ストレステストは VaR を補完する方法として用いられることが多く、将来の市場価格の変化あるいは価格変化に影響を与えそうな出来事を、過去の分析結果に主観的な判断を加えて複数のシナリオを想定し、資産価値の変化を測定する。この場合、実現確率が小さくても深刻な事態となる場合についても分析の対象とする。

また、VaR 推定に関する問題点に、確率分布の裾野のとりえ方による過小推定や異常値発生の場合の対応がある。これは異常値分析である。

以下では VaR についての基本的な計量的方法の例として、RiskMetrics、ボラティリティモデルによる方法、伝統的な分位推定、また近年注目されている極値理論 (EVT) について述べる。なお、VaR の基本的な考え方については、日本銀行 (1995)、小田 (2001) を参照。

3. 3 バリュアット・リスク (VaR: Value at Risk)

3. 3. 1 VaR の考え方

VaR は、ある期間においてある確率のもとでの最大損失額を表そうとするが、当局からみれば VaR は市場において異常な事態が発生したときには最小の損失額を示すと考える。見方は異なるが測定の方法は同様である。

いま、時点 t において、その後の k 期におけるポジションのリスクを考える。 $\Delta V(k)$ を t から $t+k$ における資産価値の変化とすると、その変化を資産の通貨単位で確率変数としてとらえる。 $\Delta V(k)$ の累積分布関数 CDF (cumulative distribution function) を $F_k(x)$ とするとき k 期間のロングポジションの VaR の確率 p を

$$p = Pr\{\Delta V(k) \leq VaR\} = F_k(VaR) \tag{3. 1}$$

で定義する。ロングポジション保有者は $\Delta V(k) < 0$ のとき損失となるから p が小のとき (3. 1) 式の VaR は負値と仮定できる。また VaR は、確率 $(1-p)$ で k 期に遭遇する潜在的損失は VaR より小か等しいと考える。

ショートポジションの場合は時点 t から $t+k$ における資産価値の増加、すなわち $\Delta V(k) > 0$ のときに損失が発生すると考えると

$$\begin{aligned} p &= Pr\{\Delta V(k) \geq VaR\} = 1 - Pr\{\Delta V(k) \leq VaR\} \\ &= 1 - F_k(VaR) \end{aligned}$$

となる。 p が小さいときショートポジションの VaR は正值で損失を表す。

この定義は VaR は CDF ($F_k(x)$) の裾野に注目していることを示し、ロングの場合は左側、ショートの場合は右側に注目しているが $-\Delta V(k)$ とすれば同様に扱える。

1 変量の CDF ($F_k(x)$) と確率 p について

$$xp = \inf\{x \mid F_k(x) \geq p\}$$

は $F_k(x)$ の p 分位と呼ばれ、 \inf は $F_k(x) \geq p$ を満たす最小の実数を表す。実際の CDF は未知であるから、その推定と分位、とくに裾野を推定することになる。

実際に応用する場合は

- (1) p の確率は、たとえば、 $p=0.01$ あるいは $p=0.05$
- (2) 期間 k は、当局の指導にもよるが1日あるいは10日など
- (3) データの頻度は期間と同じである必要はないが、日次データを使うことが多い。
- (4) $CDF(F_k(x))$ あるいは分位
- (5) ポジションの総額あるいはポートフォリオの値洗いの価値に注意する。

3. 3. 2 リスクメトリックス (RiskMetrics)

JP モルガンが VaR 推定に関して開発した RiskMetrics は、ポートフォリオの日次収益率は連続複利として条件付正規分布を仮定する。いま、日次対数収益率を r_t 、時点 $t-1$ までの情報集合を F_{t-1} とするとき、 $r_t | F_{t-1} \sim N(\mu_t, \sigma_t^2)$ を仮定する。ここで μ_t は r_t の条件付期待値、 σ_t^2 は分散である。さらに時点の推移にともない

$$\mu_t = 0, \quad \sigma_t^2 = \alpha \sigma_{t-1}^2 + (1-\alpha) r_{t-1}^2 \quad (3. 2)$$

を仮定する。これによりポートフォリオの価格の対数值 $p_t = \ln(P_t)$ は階差 $p_t - p_{t-1} = a_t$ として、 $a_t = \sigma_t \varepsilon_t$ はドリフトのない IGARCH(1, 1) を満たすことになる。 α は、たとえば (0.9, 1) の間隔で考える。

このモデルの利点は、多期間の収益率の条件付分布を求めることが容易なことである。たとえば、 $t+1$ 期から $t+k$ の対数収益率を $r_t[k]$ とするとき (3. 2) 式の IGARCH(1, 1) における条件付分布 $r_t[k] | F_t$ は、平均ゼロ、分散 σ_t^2 の正規分布となり、 ε_t の独立性の仮定から

$$\begin{aligned} \sigma_t^2[k] &= \text{Var}(r_t[k] | F_t) \\ &= \sum_{i=1}^k \text{Var}(a_{t+i} | F_t) \end{aligned}$$

により逐次求められる。 $r_{t-1} = a_{t-1} = \sigma_{t-1} \varepsilon_{t-1}$ から (3. 2) 式はすべての t に対して

$$\sigma_t^2 = \sigma_{t-1}^2 + (1-\alpha) \sigma_{t-1}^2 (\varepsilon_{t-1}^2 - 1)$$

と表わせる。 $i \geq 2$ に対して $E(\varepsilon_{t+i-1}^2 - 1 | F_t) = 0$ から

$$E(\sigma_{t+i}^2 | F_t) = E(\sigma_{t+i-1}^2 | F_t) \quad i=2, \dots, k \quad (3. 3)$$

となり、1期先予測ボラティリティは $\sigma_{t+1}^2 = \alpha \sigma_t^2 + (1-\alpha) r_t^2$ となり、(3. 3) 式から $\sigma_t^2[k] = k \sigma_{t+1}^2$ 、 $r_t[k] | F_t \sim N(0, k \sigma_{t+1}^2)$ となる。

正規分布のもとで5%の確率における境界値1.65から k 日あたりの VaR は

$$\text{VaR} = \text{ポジション計} \times 1.65 \sqrt{k} \sigma_{t+1} \quad (3. 4)$$

となる。

(例3. 1)

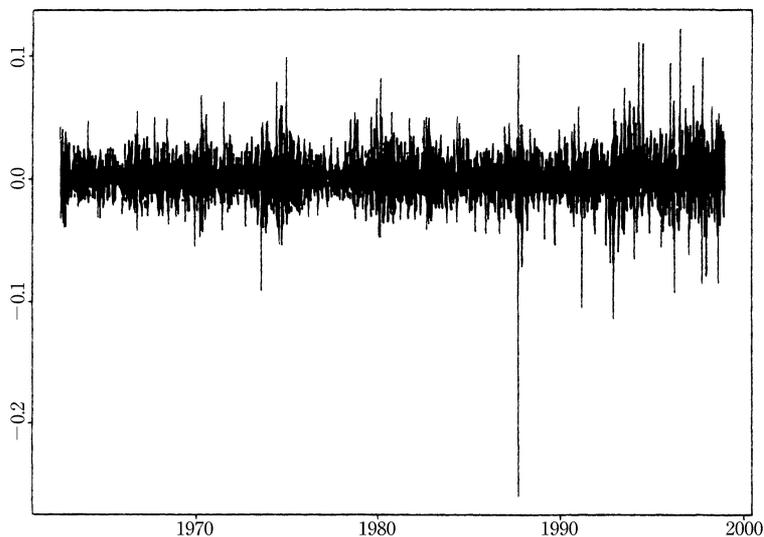
ドイツ・マルクと米ドルの連続複利日次収益率の標本標準偏差は、1997. 6においてほぼ0.53%である。投資家がこのレートで1千万ドルの買い契約をしたとすると、1日の5% VaR は

$$1 \text{ 千万ドル} \times (1.65 \times 0.0053) = 87,450 \text{ ドル}$$

また、1ヵ月(30日)では

$$1 \text{ 千万ドル} \times (\sqrt{30} \times 1.65 \times 0.0053) \sim 478,983 \text{ ドル}$$

図 3-1 IBM 株価の日次対数収益率



となる。

(例3. 2)

リスクメトリックスでは条件付き平均はゼロ，収益率のボラティリティはドリフトなしの IGARCH(1, 1) にしたがうと仮定している。図 3-1 に示した1962. 7. 3 から1998. 12. 31までの IBM 株価の日次対数収益率に対して推定したモデルは

$$r_t = a_t, \quad a_t = \sigma_t \varepsilon_t,$$

$$\sigma_t^2 = 0.9396 \sigma_{t-1}^2 + (1 - 0.9396) r_{t-1}^2$$

となる。

Riskmetrics の利点は単純で理解も応用も容易なことである。ただし，正規分布の仮定は裾野の厚いときには問題となる。また，投資家が複数ポジションをもつ場合，各ポジションの対数収益率が IGARCH(1, 1) にしたがうという単純な方法には限界がある。相互相関などを考慮すべきであるという批判もある。

3. 3. 3 VaR 推定の計量分析アプローチ

基本モデルとして GARCH モデル，SV モデル，非線形ボラティリティ・モデルなどがあるが，基本的な考え方は，ある資産の対数収益率 r_t の一般的な時系列モデルを基礎とするもので平均，分散方程式をそれぞれ

$$r_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i r_{t-i} + a_t - \sum_{j=1}^q \theta_j a_{t-j} \tag{3. 5}$$

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^u \alpha_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^v \beta_j \sigma_{t-j}^2 \tag{3. 6}$$

で表わす。パラメータが推定されたときの条件付平均，分散の 1 期先予測は

$$r_t(1) = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i r_{t+1-i} - \sum_{j=1}^q \theta_j a_{t+1-j}$$

$$\sigma_t^2(1) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^u \alpha_i \sigma_{t+1-i}^2 + \sum_{j=1}^v \beta_j \sigma_{t+1-i}^2$$

で与えられる。さらに ε_t を正規分布と仮定するとき時点 t までの情報を所与として r_{t+1} の条件付分布は $N[r_t(1), \sigma_t^2(1)]$ であり, VaR 推定のための分位は, たとえば 5% では $r_t(1) - 1.65\sigma_t(1)$ となる。自由度 v の t 分布を仮定するときには p 分位を $t_v^*(p)$ として $r_t(1) - t_v^*(p)\sigma_t(1)$ となる。

(多期間の計測)

時点 h で k 期先の多期間 VaR を計測する場合, 収益率 r_t がモデル (3. 5), (3. 6) 式にしたがうとすると, 想定シナリオなどの情報集合 F_h により予測する。たとえば, 条件付平均を ARMA モデルにより予測するとき $r_h[k]$ を時点 h における k 期先予測とすると

$$r_h[k] = r_h(1) + \dots + r_h(k)$$

は MA 表現と (3. 5) 式の ARMA モデルから予測誤差は

$$e_h(k) = r_{h+k} - r_h(k)$$

であり, このときの期待ボラティリティは条件付分散

$$\text{Var}(e_h[k] | F_h) = \sigma_h^2(k) + (1 + \Psi_1)^2 \sigma_h^2(k-1) + \dots + \left(\sum_{i=0}^{k-1} \Psi_i \right)^2 \sigma_h^2(1)$$

から求められる。 Ψ は MA 表現における係数である。たとえば, 単純なモデル

$$r_t = \mu + a_t, \quad a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

では, すべての $i > 0$ に対して $\phi_i = 0$ の場合で, 分散は

$$\sigma_h^2(1) = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_h^2 + \beta_1 \sigma_h^2$$

$$\sigma_h^2(k) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \sigma_h^2(k-1) \quad k=2, \dots, m \quad (3. 7)$$

となる。

(例3. 3)

例3. 2のIBMの日次対数収益率について Tsay (2002) の試算は, 10百万ドルのロング・ポジション, 1日のVaR, $t=9190$ を推定するとき, e_t を標準正規分布としたときのVaRは5%分位で287,700ドル, 1%分位で409,738ドルとなる。 e_t を自由度5の t 分布を仮定したときのVaRは5%分位で283,520ドル, 1%分位ときは475,943ドルとなり, 正規性を仮定した場合と基本的には近い。ただし, 標準正規分布の場合に比べて裾野の確率が小さくなる時VaRは増加する。また, 15日間のVaRを(3. 7)式により5%分位で求めると, VaRは1,039,191ドルとなる。

3. 4 分位推定 (Quantile Estimation)

分位推定はVaR推定のためのノンパラメトリックなアプローチで, 収益率の分布を特に仮定しない。たとえば, 伝統的な分位推定や分位回帰がある。

分位推定 (Quantile Estimation) は予測期間内の収益率の分布は標本期間内で同じと仮定し,

VaR 計測のために伝統的な分位を用いる。たとえば、Cox-Hinkley (1974) はポートフォリオの収益率を r_1, \dots, r_n とするとき、順序

$$r(1) \leq r(2) \leq \dots \leq r(n)$$

により順序統計量を決める。また分位回帰 (quantile regression) は、確率 p を与えたときの収益率 $\{r_i\}$ の p 分位により推定する。たとえば、金融当局による金利政策のニュースが株価収益率に影響を与えるとき、説明変数を含む F_t の分布関数 $r_{t+1} | F_t$ を用いることを考える。これについて Koenker-Bassett (1978) の分位回帰は、確率 p を与えたときの収益率 $\{r_i\}$ の p 分位を

$$x_p = \operatorname{argmin}_\beta \sum_{i=1}^n w_p(r_i - \beta)$$

とするとき

$$w_p(z) = \begin{cases} pz & z \geq 0 \text{ のとき} \\ (p-1)z & z < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

として線形回帰モデル

$$r_t = \beta' x_t + a_t$$

を推定する。 x_t は F_{t-1} の要素の予測子を用いて

$$x_p | F_{t-1} = \inf \{ \beta' x | R p(\beta_0) = \min \}$$

とする。

3. 5 異常値と VaR-EVT (Extreme Value Theory)

VaR 推定において近年注目されているのはテイル・リスクに関するもので、たとえば、収益率の分布はリスクの可能性が高いファット・テイル (fat tail) 性をもつことに注目する。市場リスクにおける VaR の計測においては異常値が生じたときの損失額を見積もるためにシナリオテストが用いられるが、正規分布を仮定した VaR は大幅な価格変動が発生する確率を過小評価することになる。いわば、VaR は分布の裾野に関する重要な情報を見落とす可能性があり、これをテイル・リスクと呼ぶ。このような異常値を計量するひとつのアプローチとして異常値理論あるいは極値理論 (EVT: Extreme Value Theory) がある。

EVT は、いわば確率分布の裾野を漸近的に評価しようとするもので、単純に考えるとき、たとえば、日次の離散間隔の資産収益率の集合 $\{r_1, \dots, r_n\}$ における最小収益率 $r(1) = \min(1 < j < n) \{r_j\}$ は最大収益率 $r(1) = \max(1 < j < n) \{r_j\}$ に比べれば最大損失を発生させる可能性の高いことに注目し、そのような場合の VaR への適用を考えるのである。

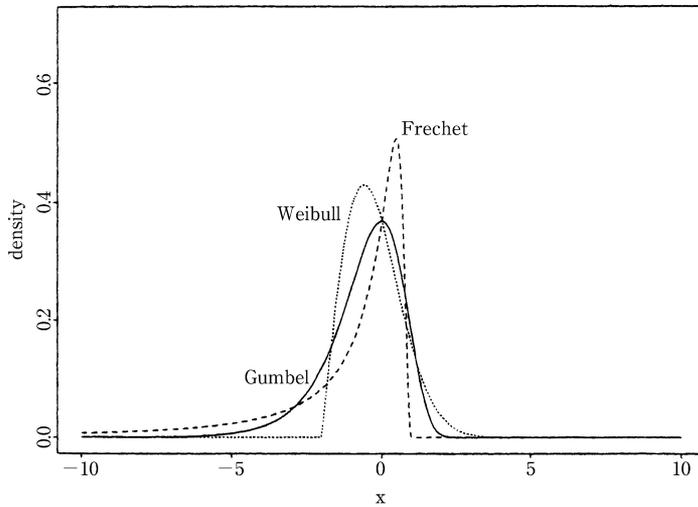
3. 5. 1 EVT の考え方

EVT は、最大値など極値 (extreme value) の確率的振る舞いを対象とするもので、基本的には分布の上位 $a\%$ のような分位に注目する。ここで問題は最大値の確率的性質が観測値の和の確率的性質に関する統計学の大数の法則と同様の結果を得ることが困難なことである。

いま、 r_i は累積分布関数を $F(x)$ をもち、系列相関はなく、レンジ $[i, u]$ を $[-\infty, \infty]$ とする。このとき $r(1)$ の CDF は

$$F_m(x) = Pr[r_{(1)} \leq x] = 1 - Pr[r_{(1)} > x]$$

図3-2 異常値分布の確率密度関数



(実線：ガンベル分布，点線：ワイブル分布，波線：フレシェ分布)

$$\begin{aligned}
 &= 1 - Pr(r_1 > x, r_2 > x, \dots, r_n > x) \\
 &= 1 - [1 - F(x)]^n \tag{3. 8}
 \end{aligned}$$

で与えられる。

実際には $F(x)$ は未知であるが、 n が無限大のとき $F_{n1}(x) \rightarrow 0 (x \leq \ell)$, $F_{n1}(x) \rightarrow 1 (x > \ell)$ で、実際には2つの列 $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, ($\alpha_n > 0$) において $r_{(1)*} = (r_{(1)}(1) - \beta_n) / \alpha_n$ の分布が収束することに注目する。 $*$ は最小を示す。 $\{\beta_n\}$ は位置, $\{\alpha_n\}$ はスケールパラメータとすると、独立性の仮定から正規化した最小 $r_{(1)*}$ の極限分布は

$$F^*(x) = \begin{cases} 1 - \exp[-(1+kx)^{1/k}] & k \neq 0 \text{ のとき} \\ 1 - \exp[-\exp(x)] & k = 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{3. 9}$$

で、 $k < 0$ のとき $x < -1/k$, $k > 0$ のとき $x > -1/k$, $k \rightarrow 0$ の極限は $k = 0$ で、 k は裾野の動向を示すシェイプ・パラメータ, パラメータ $\alpha = -1/k$ は分布の裾野指数 (tail index) と呼ばれる。

(3. 9) 式の極値分布は Jenkinson (1955) の一般化極値分布で、Gnedenko (1943) は極限分布を次の3つの型に分けている。

タイプ1 : $k = 0$ ガンベル族 (Gumbel family)。CDF は

$$F^*(x) = 1 - \exp[-\exp(x)], \quad -\infty < x < \infty \tag{3. 10}$$

タイプ2 : $k < 0$ フレシェ族 (Frechet family)。CDF は

$$F^*(x) = \begin{cases} 1 - \exp[-(1+kx)^{1/k}] & x < -1/k \text{ のとき} \\ 1 & \text{それ以外} \end{cases} \tag{3. 11}$$

タイプ3 : $k > 0$ ワイブル族 (Weibull family)。CDF は

$$F^*(x) = \begin{cases} 1 - \exp[-(1+kx)^{1/k}] & x < -1/k \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \tag{3. 12}$$

要約すると $F(x)$ の裾野は最小 $F^*(x)$ の極限分布を決める。図3-2はその例である。

Fisher-Tippett 定理はこれを整理し、 n 個の観測値 M_n について、ある確率分布 H と定数 $c_n >$

表 3-1 極値分布の最大値吸引域に属する分布

フレシェ分布	ガンベル分布	ワイブル分布
コーシー分布 パレート分布	正規分布 対数正規分布 指数分布	一様分布 ベータ分布

0, $d_n \in R$ が存在して $(M_n - d_n)/c_n \rightarrow H$ のとき H はフレシェ分布, ワイブル分布, ガンベル分布のいずれかと同じ型とするもので, これらの分布を極値分布と呼んでいる。

一般に用いられている連続的な分布のほとんどは3つの極値分布に収斂するといわれ, その分布の集合を最大値吸引域 (maximum domain attraction) という。その例は表 3-1 で, 裾野が厚いといわれる対数正規分布はガンベル分布に属するといわれるが, ガンベル分布は極値分布では比較的裾野が薄い。リスク管理においては, 安定分布, t 分布を含むフレシェ分布に注目することが多い。

確率密度関数は (3. 9) 式を微分して

$$f^*(x) = \begin{cases} (1+kx)^{1/(k-1)} \exp[-(1+kx)^{1/k}] & k \neq 0 \text{ のとき} \\ \exp[x - \exp(x)] & k = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

で表され, $k=0$ のとき $-\infty < x < \infty$, $k < 0$ のとき $x < -1/k$, $k > 0$ のとき $x > -1/k$ である。

これらの EVT は2つの示唆を与える。第1は r_t の CDF の裾野は特別の分布というより最小 $F^*(x)$ の極限分布によることから応用範囲は広いこと, ただし $\{\beta_n\}$, $\{\alpha_n\}$ は CDF に依存する。第2は, 裾野指数 k は r_t の時間間隔に依存しないことから VaR への応用も容易と考えられることである。

EVT については, たとえば, ダニエルソン・森本 (2000), 森本 (2000), 山井・吉羽 (2002), 牧本 (2004), 極値に関しては, たとえば, Embrechts et al. (1997), EVT の系列依存性についての拡張については, たとえば, Leadbetter et al. (1983) を, それぞれ参照。

3. 5. 2 推定法の例

異常値の分布は3つのパラメータ k , β_n , α_n を含み, それぞれ形, 位置, スケールを表す。推定法にはパラメトリック・アプローチ, ノンパラメトリック・アプローチがあり, 推定値は標本期間 n に依存する。前者には最尤法, 回帰法などがあり, 後者には Hill (1975) の推定法がある。

(IBM 株価収益率への応用例)

Tsay (2002) は EVT を IBM 株価の日次対数収益率に適用している。期間は1962. 6. 3 から1998. 12. 31で標本数は9190である。図 3-3 は最大部分と最小部分を表したもので, 1987年10月のクラッシュが明らかである。そこでこの値を除き, 0.5%から13%の範囲とする。

表 3-2 は Hill 推定量で, 結果は比較的安定している。図 3-4 は q に対応する $k_n(q)$ の散布図で q が小のとき以外は安定している。シェイプ・パラメータはほぼ -0.30 となり 5%水準で0とはいえない。負の異常値についてシェイプ・パラメータ k は小さく, 左側の裾野が重いことを示している。総じて分布は Frechet 族に属しているといえることから正規性の仮定は否定され

図 3-3 IBM 株価の日次対数収益率 ((a)正值, (b)負値)

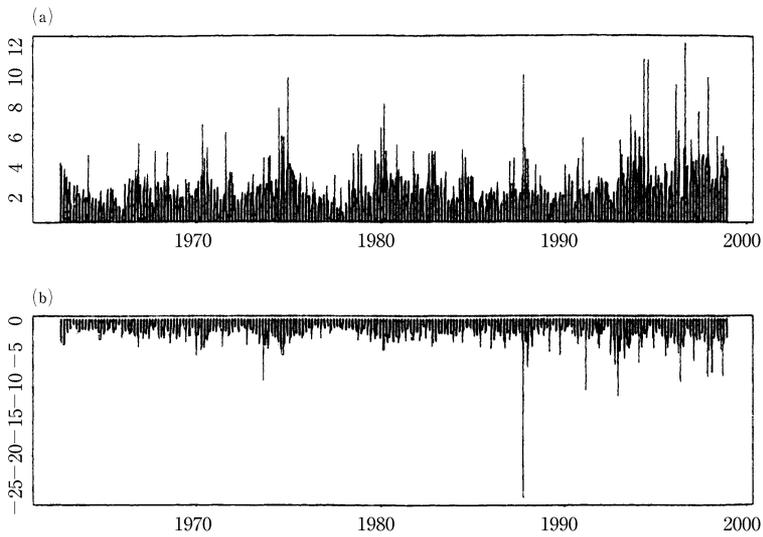


表 3-2 IBM 株価の日次対数収益率の Hill 推定値

q	190	200	210
Maximum	-0.300(0.022)	-0.297(0.021)	-0.303(0.021)
Minimum	-0.290(0.021)	-0.292(0.021)	-0.289(0.020)

図 3-4 IBM 株価の日次対数収益率 Hill 推定値 ((a)右裾野, (b)左裾野)

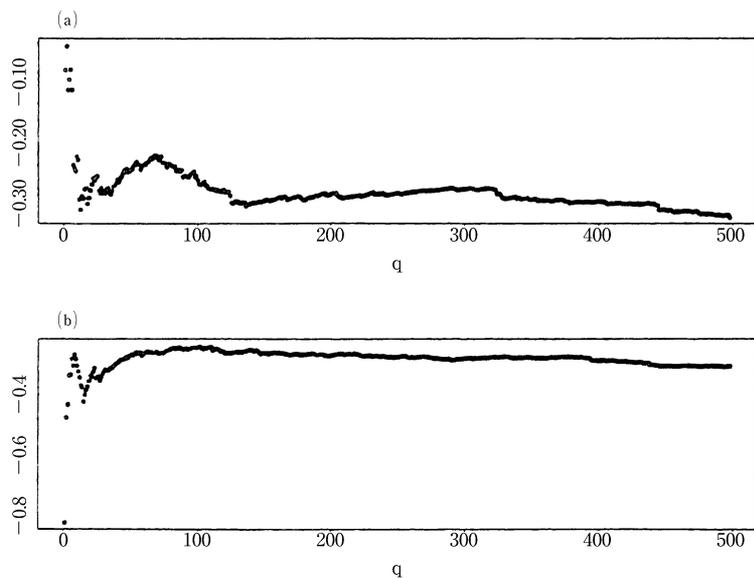
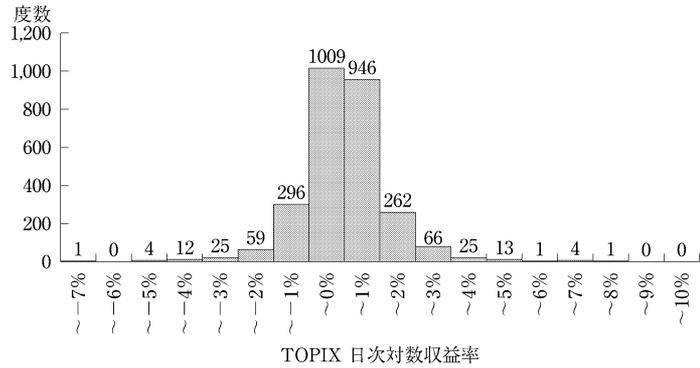


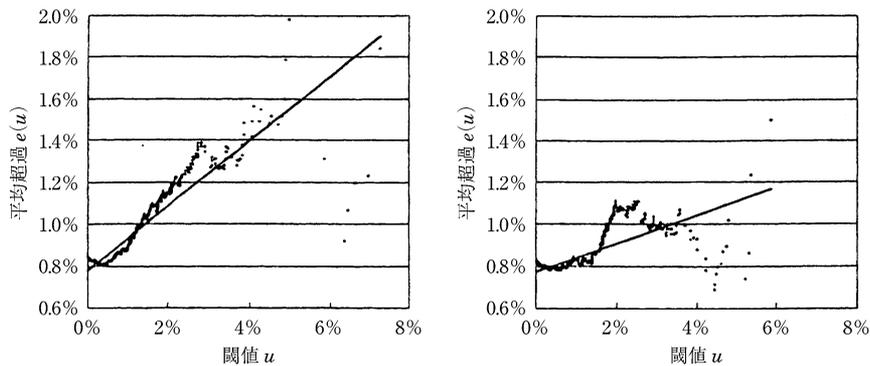
表 3-3, 3-4 TOPIX データの基本統計量 (左表) およびヒストグラム (右グラフ)

データ数	2,725
平均	-0.017%
最小値	-7.365%
最大値	9.125%
標準偏差	1.204%
歪度	0.3491
尖度	8.6762
A R (1)	0.1039



TOPIX 日次対数収益率

図 3-5 TOPIX の平均超過プロット



(左: 分布の右裾, 右: 分布の左裾)

る。この結論は Longin (1996) にもみられる。

標本を 1 カ月 ($n=21$) から 1 年 ($n=252$) の場合について最尤法を適用した結果を Tsay は次のように要約している。

- 位置, スケール・パラメータ β_n, α_n は n の増加とともに増大する
- 形のパラメータは $n \geq 63$ で負の異常値ではほぼ安定, ただし, 正の異常値で不安定

というもので, これについても Longin の結論と類似していると述べている。

(TOPIX への応用例)

森本 (2000) は TOPIX 日次収益率 (1988-1998) について検討している。基本統計量は表 3-3, 3-4 でファットテイルの可能性がうかがわれる。ここで横軸に閾値, 縦軸に実測値を用いた平均超過プロットを正規分布, 指数分布, 一般パレート分布についてみると図 3-5 のようになり裾野の厚さがみられる。

3. 5. 3 EVT アプローチによる VaR 推定

EVT を用いて VaR を推定する方法について, Longin (1999a, 1999b) の 8 ステップによる方法を 2 つの部分に分けてみると, Part1 ではパラメータの推定, Part2 では期間による確率から

VaR を考えている。

(Part1)

資産収益率の観測期間 T を重複しないで n 期を g 個に分け $T=ng$ とする。 $T=ng+m$ ($1 \leq m < n$) のとき最初の m 個は標本から除く。EVT から期間 $\min\{r_{ni}\}$ における位置, 大きさ, シェイプパラメータ β_n, α_n, k_n が推定できる。 $x=(r-\beta_n)/\alpha_n$ を (3. 9) 式の CDF の最尤推定量に代入して一般化分布の確率の分位を得る。 p^* をロングポジションの潜在的損失の確率, r_n^* を分布の区分期間の p^* 分位とすると

$$r_n^* = \begin{cases} \beta_n - (\alpha_n/k_n) \{1 - [-\ln(1-p^*)]k_n\} & k_n \neq 0 \text{ のとき} \\ \beta_n + \alpha_n \ln[-\ln(1-p^*)] & k_n = 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (3. 13)$$

を得る。応用においては $k_n \neq 0$ に注目する。

(Part2)

下側確率 p^* を与えて (3. 13) 式の分位 r_n^* は EVT に基づく分割期間における VaR である。次のステップは分割期間と収益率 r_t との関係を明らかにすることである。

収益率の多くは系列相関はないか, あるいは小さいと仮定しているから (3. 8) 式の関係を利用して

$$p^* = P(r_{ni} \leq r_n^*) = 1 - [1 - P(r_t \leq r_n^*)]^n$$

あるいは

$$1 - p^* = [1 - P(r_t \leq r_n^*)]^n \quad (3. 14)$$

を得る。これは収益率 r_t の VaR を得るための確率のあいだの関係を示す。いわば, 小さな下側確率 p については (3. 14) 式により p^* が得られると r_t の p 分位は r_n^* であることを示している。ここで確率 $p = P(r_t \leq r_n^*)$ である。このとき小さな確率 p に対して VaR は

$$\text{VaR} = \begin{cases} \beta_n - (\alpha_n/k_n) \{1 - [-n \ln(1-p)]k_n\} & k_n \neq 0 \text{ のとき} \\ \beta_n + \alpha_n \ln[-n \ln(1-p)] & k_n = 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (3. 15)$$

となる。

VaR 計測のために伝統的な EVT を適用する方法を要約すると次のようになる。

- (1) 標本期間 n を選び, $g=T/n$ のとき分割期間 $\{r_{ni}\}$ ($i=1, \dots, g$) を得る
- (2) 最尤推定量により β_n, α_n, k_n を推定
- (3) 推定結果を検定
- (4) 検定結果が妥当のとき (3. 15) 式により VaR を計測。

VaR に関する議論は多く, 確率によっても VaR は大きく変わる。EVT の観点から見れば RiskMetrics の方法は異常値理論の特殊な場合といえる。

(例3. 6) IBM 株価収益率

1962. 6. 7 から 1998. 12. 31 の IBM 株価日次対数収益率について (3. 15) 式による Tsay (2002) の試算は, $n=63$ のとき $\alpha_n=0.945, \beta_n=-2.583, k_n=-0.335$ である。左側確率 0.01 のとき VaR は -3.04969 であるから, 10 百万ドル・ロングのとき

$$10 \text{ 百万ドル} \times 0.0304969 = 304,969 \text{ ドル}$$

となる。確率 0.05 のとき 166,641 ドルである。

ほぼ 1 ヶ月のときで $n=21$ の場合は, $\alpha_n=0.823, \beta_n=-1.902, k_n=-0.197$ で, 異常値分布

表3-5 TOPIXにおけるVaRのボラティリティ

データ/モデル		観測開始日	観測終了日	平均値	標準誤差	最小値	最大値
日次損益		7/29/1954	7/30/1999	3	85	-1,581	912
VaR	正規 GARCH			-171	104	-2,828	-59
	GARCH- t			-186	109	-2,230	-65
	EVT			-220	70	-394	-103
日次損益		1/4/1996	7/30/1999	-1	120	-525	660
VaR	正規 GARCH			-264	91	-756	-143
	GARCH- t			-290	92	-713	-175
	EVT			-325	21	-394	-290
日次損益		1/4/1996	3/31/1999	26	118	-241	370
VaR	正規 GARCH			-259	64	-412	-180
	GARCH- t			-279	61	-421	-204
	EVT			-318	3	-331	-309
日次損益		4/1/1999	6/30/1999	18	100	-201	660
VaR	正規 GARCH			-257	37	-357	-202
	GARCH- t			-282	40	-384	-223
	EVT			-317	3	-319	-309

注：数値は万円。1億円のポートフォリオに対する日次の損益額を示している。GARCH- t はノイズが t 分布にしたがうと仮定したモデル

の1%分位では-3.40013となる。

これらの結果はGARCH(1, 1)を用いた例3.3の場合より小さく、分位による推定例より小さい。これは確率の選び方によるもので、0.1%のときにはAR(2)-GARCH(1, 1)で546,641ドル、ETVで666,590ドルとなる。ただし、ここでは対数収益率に独立性を仮定していること、分割区間ではボラティリティが集中することがあることから適切とはいえない(たとえばTsay(2002)の提案を参照)。

(例3.7) EVTとGARCHによるVaR比較

ダニエルソン・森本(2000)は収益率の特性をリスクの観点からとらえるために、非正規性として裾野の厚さ、ボラティリティのクラスタリング、分布の非対称性および予測に注目する。そこでまず分布の中心の高さおよび裾野の厚さと収益率の推移においてボラティリティが高い時期と低い時期があるかどうかを検討する。

EVTは極値の振る舞いに注目するため確率変数の裾野部分のモデル化が試みられる。東証のTOPIXと米国のS&P500のVaRのボラティリティは表3-5で、正規GARCHの推定精度は高くないこと、EVTでは比較的小さなレンジにあること、クラスタリングについてはEVTではあきらかに存在するがGARCHでは大幅に減少していることを示している。また表3-6は、VaRを超過するデータの多いことを示している。

EVTに関しては新たなアプローチも提案されている。たとえばTsay(2002)は2次元ポアソン過程モデルを適用してVaRを推定した例を挙げている。

表3-6 VaRを超過したデータ発生率（バイオレーション率）の比較

モデル	データ	左 裾		右 裾	
		95.0%	99.0%	95.0%	99.0%
正 規	TOPIX	4.50%	1.98%	4.10%	1.59%
	SP500	5.13%	1.96%	4.81%	1.66%
	JPY/USD	5.65%	2.50%	5.15%	2.09%
	WTI	5.08%	1.98%	4.80%	1.90%
	TSE2	4.76%	2.04%	5.06%	1.86%
正規 GARCH	TOPIX	5.14%	1.65%	4.05%	1.05%
	SP500	5.47%	1.81%	4.30%	0.99%
	JPY/USD	5.57%	2.12%	4.90%	1.50%
	WTI	5.04%	1.71%	4.40%	1.43%
	TSE2	5.25%	1.82%	4.34%	1.22%
GARCH- <i>t</i>	TOPIX	5.80%	1.25%	4.44%	0.71%
	SP500	6.01%	1.28%	4.62%	0.71%
	JPY/USD	6.26%	1.34%	5.23%	0.86%
	WTI	6.27%	1.15%	4.68%	0.99%
	TSE2	5.39%	1.29%	4.76%	0.89%
EVT	TOPIX	5.23%	1.18%	5.38%	1.30%
	SP500	5.61%	1.27%	5.55%	1.27%
	JPY/USD	5.51%	1.31%	6.43%	1.53%
	WTI	5.08%	0.87%	5.32%	1.23%
	TSE2	5.45%	1.23%	5.75%	1.38%

注：チェックした VaR の数は TOPIX=12,679, SP500=11,133, JPY/USD=3,593, WTI=2,521, TSE2=6,666。

表3-7 サンプル・ポートフォリオのペイ・オフ

ポートフォリオ A			ポートフォリオ B		
ペイ・オフ	損失額	確 率	ペイ・オフ	損失額	確 率
100	-2.95	50.000%	98	-0.95	50.000%
95	2.05	49.000%	97	-0.05	49.000%
50	47.05	1.000%	90	7.05	0.457%
			20	77.05	0.543%

注：ポートフォリオ B のペイ・オフが90および20となる確率は四捨五入されており正確な値では表示されていない（実際には、これら2つの事象の確率の和が1%で、ポートフォリオのペイ・オフの期待値が97.05となるよう設定）。

3. 5. 4 多変量極値分布：VaR とショートフォール

VaR は分布の裾野に関する重要な情報を見落とす可能性のあることから山井・吉羽（2002）は VaR と期待ショートフォールのテイル・リスクの比較を行っている。期待ショートフォールは標準的なリスク指標である VaR に代わるリスク指標として提案されているもので、損益額分布の損失部分のみを考慮する下方リスク指標といえる。テイル・リスクについては、たとえば、オプション・ポートフォリオにおける Danielsson（2001）の分析、与信ポートフォリオにおける

表 3-8 サンプル・ポートフォリオの期待ショートフォールと VaR

	ポートフォリオA	ポートフォリオB	備 考
ペイ・オフの期待値	97.050	97.050	期待値は同じ
VaR (信頼水準99%)	47.050	7.050	VaR は A が大
期待ショートフォール (信頼水準99%)	47.050	45.050	期待ショートフォールは A が大

Lucas et al. (2001) などの分析がある。山井・吉羽は、大幅な損失が発生する可能性の高いポートフォリオの期待ショートフォールが小さくなる場合にテイル・リスクが発生すると考えて分析する。表 3-7 はサンプル・ポートフォリオのペイオフで、2つのポートフォリオ A, B のいずれも期待値は97.05で、ポートフォリオ A では損失が10を下回る確率は99%であるが1%の確率で初期投資額97.05の半分近い損失47.05の発生する可能性がある。一方、ポートフォリオ B は損失が10を下回る確率は約99.5%と A より高いが、約0.4%の僅かな確率で77.05という初期投資額の半分以上失われる可能性がある。期待ショートフォールと VaR は表 3-8 で、この結果では B が小さいが、これは期待ショートフォールの発生確率が小さいことからリスクが小さいと判断してしまう、という意味ではテイル・リスクが存在していることを示している。多変量極値理論では、周辺分布が [0, 1] 上の一様分布となる多変量分布関数となるコピュラ関数を考え、それが閾値を大きくすると超過値が収束することを基にしている。

さらに山井・吉羽は日米英とエマージング18カ国の対米ドル為替レート (1993. 11. 1-2001. 10. 29) を用いて単変量および多変量における分布について検討している。結果は一般化パレート分布のもとで VaR あるいは期待ショートフォールがリスクを適切に表現できないことがあることを示している。VaR と期待ショートフォールのリスクは、分布の裾野指数、スケールパラメータ、超過値の割合、信頼水準、損失の依存関係などのさまざまな条件の相互作用によって発生する。また、極値理論では VaR にテイル・リスクの発生すること、リスク管理では単一指標の算出を最終目的とすることについての問題点を示している。

3. 6 多変量時系列とボラティリティモデル

各国の金融市場の依存関係は従来以上に強まっていることから複数市場のファイナンスのダイナミックな構造をとらえ、収益率の関係を同時にとらえるためには多変量モデルによる分析が行われる。

前節までの議論は多変量モデルに一般化できる。基本的には VAR (多変量自己回帰モデル) であるが、新たなモデルを必要とする場合もあり、また変数間の関係については他のモデルにより検討する必要がある。VAR モデル、あるいはその共和分については文献も多い。たとえば、非線形モデルに共和分概念を考慮して多変量モデルに拡張し裁定機会について考察した例がある (Tsay(2002))。

多変量の場合の基本的な統計量として変数間の関係をとらえる相互相関行列がある。たとえば、1926. 1 から1999. 12までの図 3-6 に示した IBM 株価と S & P500 指数の月次収益率 (配当支払を含む) の同時相関係数は0.64であるがラグ 1 については低い。図 3-7 は散布図で、表 3-9(a)

図3-6 IBM株価月次対数収益率とS & P500指数（百分率）

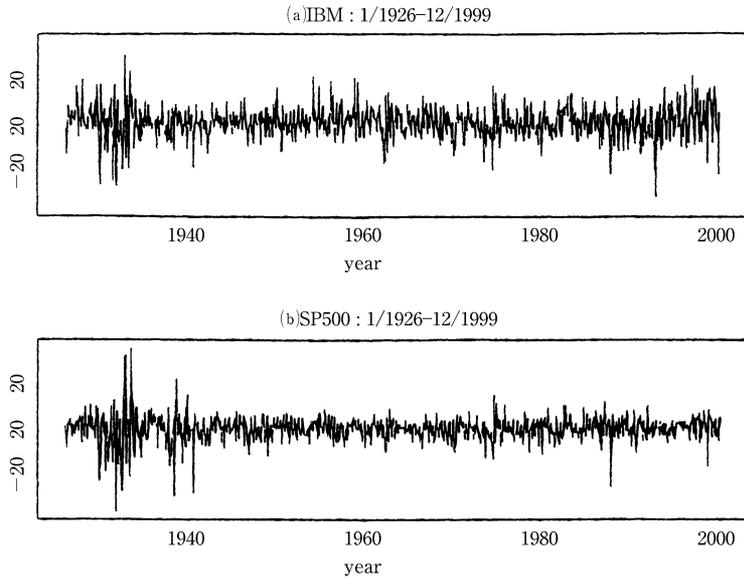
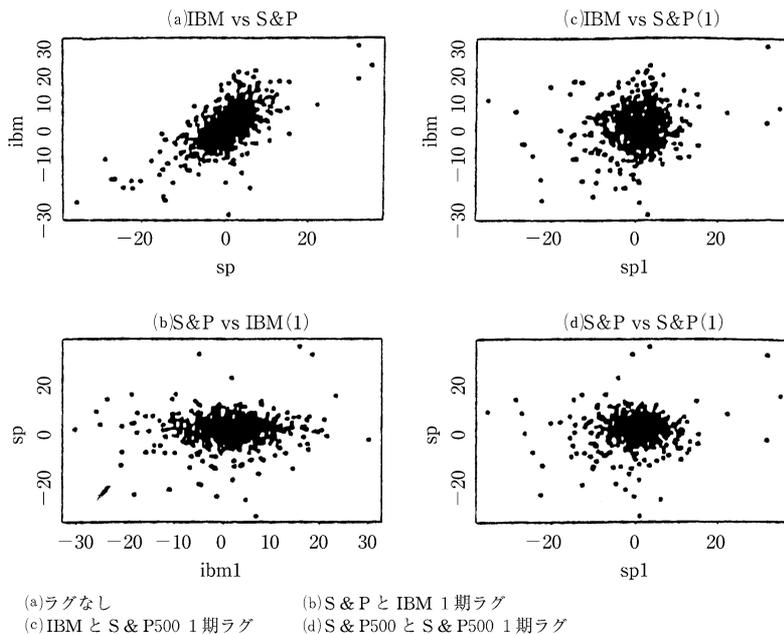


図3-7 IBM株価月次対数収益率とS & P500指数（百分率）の散布図



は統計量、(b)は相互相関で変数が多くなると特徴を捉えるのが困難になるので Tiao-Box (1981) の簡便法により+, -, ・で表したのが(c)である。図3-8は自己相関関数(ACF)で、負の相関もみられる。

また、図3-8は米国財務省証券30年物、20年物、10年物、5年物、1年物の月次収益率で、期間は1942.1から1999.12までである。1年物の変動性は他の証券より小さい。また、系列相

図 3-8 米国政府債の月次収益率

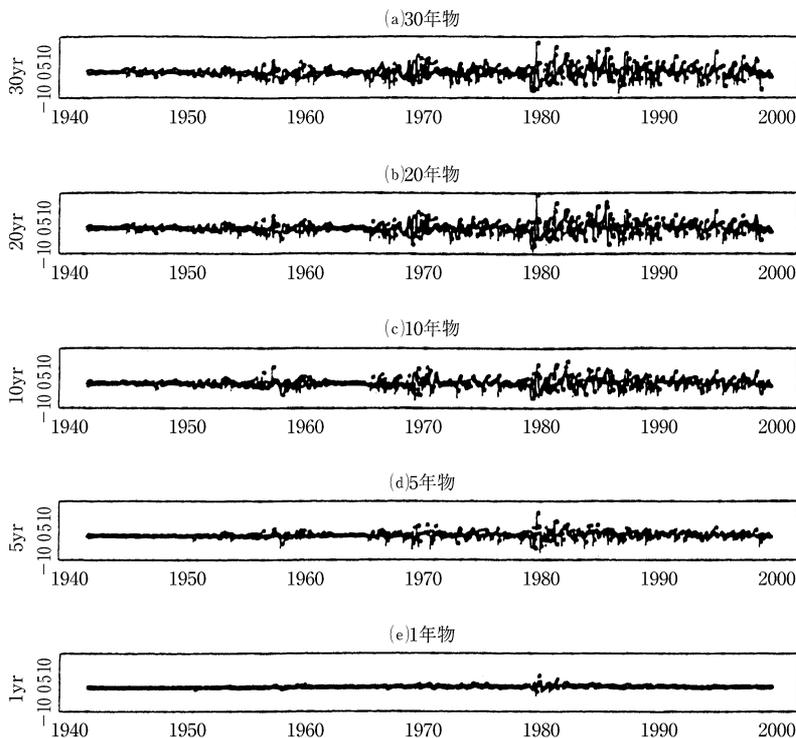


表 3-9 IBM 株価月次対数収益率と S & P500 指数の相互相関関数

(a) 基本統計										
	平均	標準誤差	歪度	尖度	最小	最大				
IBM	1.240	6.729	-0.237	1.917	-30.37	30.10				
SP5	0.537	5.645	-0.521	8.117	-35.58	35.22				
(b) 相互相関										
Lag 1		Lag 2		Lag 3		Lag 4		Lag 5		
.08	.10	.02	-.06	-.02	-.07	-.02	-.03	.00	.07	
.04	.08	.02	-.02	-.07	-.11	.04	.02	.00	.08	
(c) (b)の記号表現										
[++]		[::]		[- -]		[::]		[: +]		

注：(c)において・は値が小さい場合の表示

関は高く、特に長期債は大きい。表 3-10はラグ 1 および 2 の相互相関行列 (CCM) で、ラグ 1 の相関が高いことを示している。

相互相関の検定には多変量ポートマン検定がある。1 変量 Ljung-Box 検定量 $Q(m)$ は Hosking (1980, 1981), Li-McLeod (1981) により一般化され、帰無仮説 $H_0 : \rho_1 = \dots = \rho_m = 0$ に対して、対立仮説 $H_a : \rho_i \neq 0$ を検定し、自己・相互相関の有無を検定する。検定統計量には

表 3-10 米国政府債月次収益率の満期日ごとの相互相関

Lag 1					Lag 2				
(a)相互相関									
.10	.08	.11	.12	.16	-.01	.00	.00	-.03	.03
.10	.08	.12	.14	.17	-.01	.00	.00	-.04	.02
.09	.08	.09	.13	.18	.01	.01	.01	-.02	.07
.14	.12	.15	.14	.22	-.02	-.01	.00	-.04	.07
.17	.15	.21	.22	.40	-.02	.00	.02	.02	.22
(b)(a)の記号表現									
$\begin{bmatrix} +++++ \\ +++++ \\ +++++ \\ +++++ \\ +++++ \\ +++++ \end{bmatrix}$					$\begin{bmatrix} \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots+ \end{bmatrix}$				

$$Q_k(m) = T^2 \sum_{\ell=1}^m (1/(T-\ell)) \text{tr}(\Gamma_\ell' \Gamma_0^{-1} \Gamma_\ell \Gamma_0^{-1})$$

がある。Tは標本数、kはr_tの次元、tr(A)は行列Aのトレース、Γは相互共分散行列、()は転置である。

また、閾値自己回帰モデルの一般化として共和分の関係を利用した多変量閾値モデルも提案されている。このモデルでは、裁定機会が存在するとき利益可能である場合には取引費用や他の経済的あるいはリスク要因によるある閾値を超えるモデルを考え、誤差修正モデル（ECM）の適用も試みている。多変量閾値モデルについては Balke-Fomby（1997）を参照。

3. 6. 1 多変量ボラテイルティモデル

多変量ボラテイルティモデルは1変量モデルを一般化し、多変量の資産収益率のボラテイルティの動的関係等について考察し、ポートフォリオ選択や多変量の VaR についての議論が展開される。

多変量資産収益率の系列を {r_t} とするとき1変量の場合のように

$$r_t = \mu_t + a_t$$

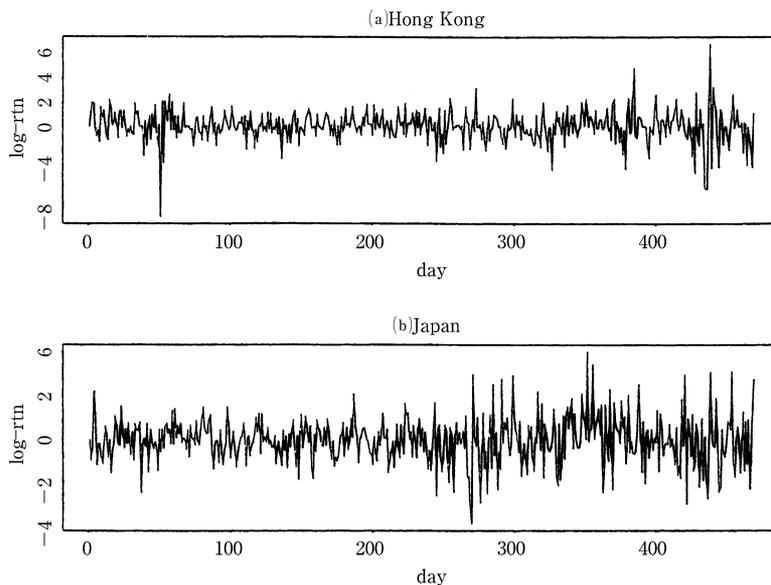
とする。μ_t = E(r_t | F_{t-1}) は過去の情報を与えたときの r_t の条件付期待値、a_t = (a_{1t}, ..., a_{kt})' はショックあるいはイノベーション・ベクトルである。μ_t は多変量時系列モデルの条件付期待値と仮定し、平均方程式を ARMA 型ベクトル

$$\mu_t = \Phi_0 + \sum_{i=1}^p \Phi_i r_{t-i} - \sum_{i=1}^q \Theta_i a_{t-i}$$

で表す。また、a_t の条件付共分散行列 Σ_t = Cov(a_t | F_{t-1}) はボラテイルティの推移に関するモデルである。ただし、実際に応用する場合は変数が多いときに注意を要する。

Σ_t の対称性を利用するためにリパラメトリゼーションを行う。その方法にはたとえば、相関係数を用いる方法、コレスキー分解による方法などがある。

図 3-9 株価指数の日次対数収益率 ((a)香港, (b)日本)



3. 6. 2 2変数 GARCH モデル

多変量ボラテリテイモデルの基本的な例として2変数 GARCH モデルの例を取りあげる。

r_t を k 次元の収益率系列とすると、時間の推移に関して $k(k+1)/2$ 次元のベクトル Ξ を用いる。 $k=2$ の場合でも複雑になる可能性があるので制約を課すことも多い。

(1) 定相関係数モデル

次数を抑えるために Bollerslev (1990) は相関係数を時不変 $\rho_{21t} = \rho_{21}$ として定数とする。このときボラテリテイモデルは Ξ^*t に関して2本の式 $\Xi^*t = (\sigma_{11t}, \sigma_{22t})'$ となり、GARCH(1, 1) モデルは

$$\Xi^*t = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta \Xi^*_{t-1} \tag{3. 16}$$

となる。ここで $a_{t-1}^2 = (a_{1,t-1}^2, a_{2,t-1}^2)'$, α_0 は2次元正值ベクトル, α_1, β は 2×2 の非定符号行列で

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11,t} \\ \sigma_{22,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{10} \\ \beta_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,t-1}^2 \\ a_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11,t-1} \\ \sigma_{22,t-1} \end{bmatrix} \tag{3. 17}$$

のようになる。 $\eta_t = a_t^2 - \Xi_t^*$ とするとき (3. 16) 式を

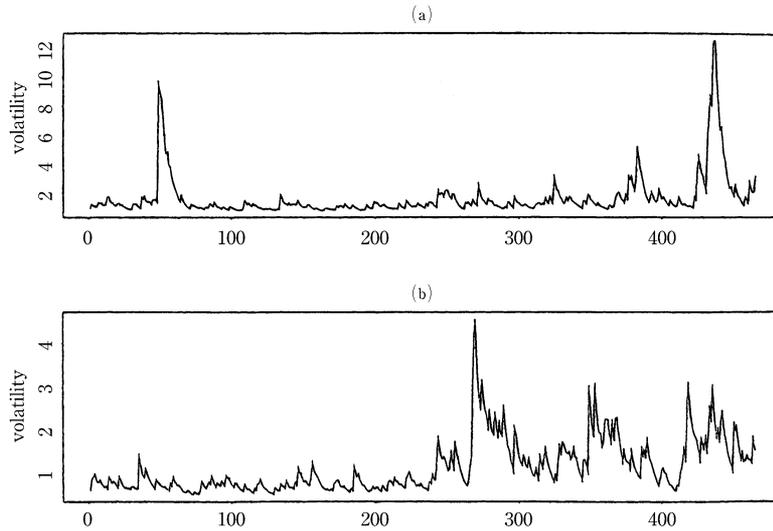
$$a_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) a_{t-1}^2 + \eta_t - \beta_1 \eta_{t-1}$$

として, a_t^2 に関する2変数 ARMA(1, 1) モデルとする。これは1変数 GARCH(1, 1) モデルの一般化であり, 次のような結果が得られる。

- (1) $\alpha_1 + \beta_1$ のすべての固有値が正で1より小であれば, a_t^2 についての2変数 ARMA(1, 1) モデルは弱定常である。これは収益率のショック過程は正值定符号の無条件共分散行列をもつこと, a_t^2 の無条件分散の要素は $(\sigma_1^2, \sigma_2^2)' = (I - \alpha_1 - \beta_1)^{-1} \phi_0$ で, a_{1t} と a_{2t} の無条件分散は $\rho_{21} \sigma_1 \sigma_2$ である。

- (2) $\alpha_{12} = \beta_{12} = 0$ のとき a_{1t} のボラテリテイは a_{2t} の過去のボラテリテイに依存しない。同

図3-10 株価指数の日次対数収益率のボラティリティモデル ((a)香港, (b)日本)



様に $\alpha_{21} = \beta_{21} = 0$ のときについても a_{2t} , a_{1t} についていえる。

(3) α_1 , β_1 が対角行列のとき、モデルは2本の1変量 GARCH(1, 1) モデルとなり、動的な関連はなくなる。

(4) 予測の出発点を h とするときボラティリティの1期先予測モデルは

$$E_h^*(1) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) E_h^*(\ell - 1) \quad \ell > 1$$

と表せる。

(例3. 8. 1) 1996. 1. 1 から1997. 10. 16までの香港と日本の株価指数による日次の対数収益率は図3-9で、標本数は469である。なお、1997. 10. 17の金融危機の時期を除いている。香港、日本の収益率を、それぞれ r_{1t} , r_{2t} とするとき1変量 GARCH モデルの結果は

$$r_{1t} = 0.137r_{1,t-1} + a_{1t}, \quad a_{1t} = \sigma_{1t}\varepsilon_{1t},$$

$$\sigma_{1t}^2 = 0.164 + 0.142a_{1,t-1}^2 + 0.765\sigma_{1,t-1}^2$$

$$r_{2t} = a_{2t}, \quad a_{2t} = \sigma_{2t}\varepsilon_{2t},$$

$$\sigma_{2t}^2 = 0.085 + 0.128a_{2,t-1}^2 + 0.807\sigma_{2,t-1}^2 \quad (3. 18)$$

$$(3. 19)$$

となった。 r_{1t} の AR(1) 係数を除いて推定係数は有意であり、Ljung-Box 統計量でもモデルは適切としている。図3-10は推定ボラティリティで、香港の変動は大きい、日本の変動は増加傾向にあることを示している。イノベーションの無条件分散は、香港が1.76、日本が1.31である。

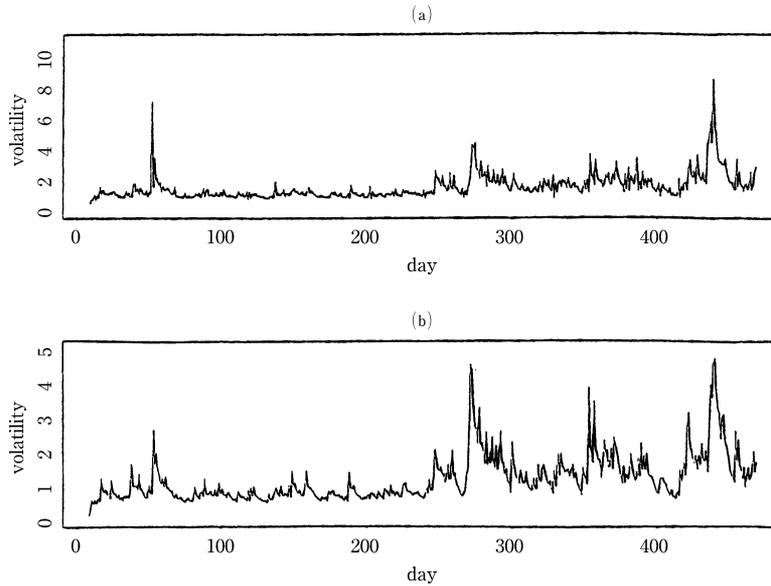
2変量 GARCH モデルについては次の2つを推定している。

第1のモデルの平均方程式、分散方程式はそれぞれ

$$r_{1t} = -0.118r_{1,t-6} + a_{1t}$$

$$r_{2t} = a_{2t},$$

図 3-11 株価指数の日次対数収益率のボラティリティ ((a)香港, (b)日本)



$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \sigma_{11,t} \\ \sigma_{22,t} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.275 \\ (0.079) \\ 0.051 \\ (0.014) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.112 \\ (0.032) & & \\ & 0.091 & \\ & & (0.026) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,t-1}^2 \\ a_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 0.711 \\ (0.068) & & \\ & 0.869 & \\ & & (0.028) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11,t-1} \\ \sigma_{22,t-1} \end{bmatrix} \tag{3. 20}
 \end{aligned}$$

で、括弧内は標準誤差、 a_{1t} と a_{2t} の相関係数は0.226である。推定結果は、香港、日本のボラティリティは動的に関連しているとは必ずしもいえないが、ボラティリティの時点は似ているといえる。

第2のモデルは2変量定相関係数モデルで結果は

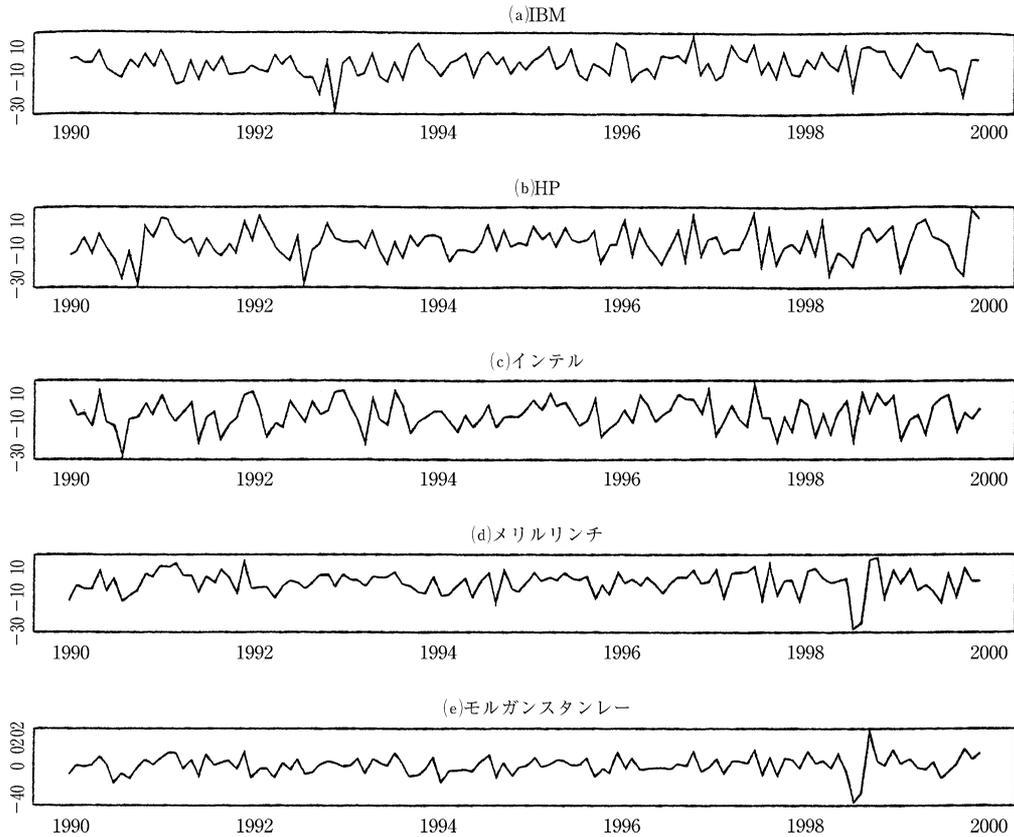
$$r_{1t} = -0.143r_{1,t-6} + a_{1t}$$

$$r_{2t} = a_{2t},$$

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \sigma_{11,t} \\ \sigma_{22,t} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.378 \\ (0.103) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.108 \\ (0.030) & & \\ & 0.172 & \\ & & (0.035) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,t-1}^2 \\ a_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} & 0.865 \\ & (0.109) \\ 0.321 & 0.869 \\ (0.135) & (0.028) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11,t-1} \\ \sigma_{22,t-1} \end{bmatrix} \tag{3. 21}
 \end{aligned}$$

で、 a_{1t} と a_{2t} の相関係数は0.236となった。(3. 20)の結果と比べるとフィードバックの関係は

図3-12 IBM, ヒュレット・パッカード, インテル, メルリリンチ, モルガンスタンレーの株価月次対数収益率（百分率）



より明らかといえる。また、無条件分散は1変量のモデル(3.18), (3.19)の結果に近いこと、(3.20)の図3-10と(3.21)の図3-11を比べると、図3-12は両市場のボラティリティの相互の影響がより明らかになっている。この時変性からTsayは時変相関モデルにより検討している。しかし、推計した2本の2変量モデルにみられる相違から、標本数や変数を追加するなど、さらに検討を加えることが必要であることを強調している。

これらのモデルはより高次のボラティリティ・モデルに拡張できる。

3.6.3 多変量解析手法の応用

多変量時系列解析で重要なものに共分散構造の分析がある。これはたとえば、多変量収益率時系列の共分散構造はポートフォリオ選択に示唆することがあると考えられるからで、主成分分析は代表的なものである。たとえばTsay(2002)は、相関行列からIBM, HP, Intel, メルリリンチ, モルガンスタンレー各社の月次対数収益率（配当支払を含む）について1990.1から1999.12までのデータについて主成分分析を適用した。図3-12は各社の系列、表3-11は分析結果で、最初の2つの固有値 λ_i および固有ベクトル e_i ($i=1, 2$)でほぼ72%説明しており、第1主成分は市場要素、第2主成分は業種要素であることがうかがわれる。

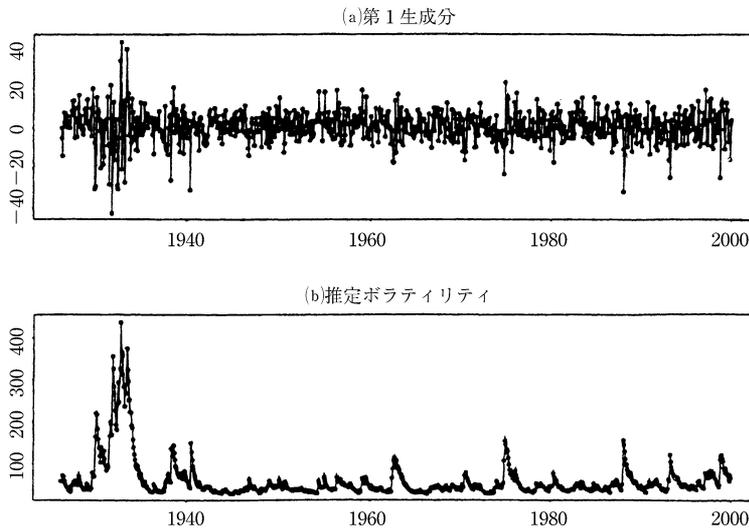
表3-11 IBM, ヒュレット・パッカード, インテル, メリルリンチ, モルガンスタンレーの株
 価月次対数収益率の主成分分析

(a) 共分散行列より推定					
固定値	256.16	116.14	64.91	46.82	22.11
比率	0.506	0.229	0.128	0.093	0.044
累積比率	0.506	0.736	0.864	0.956	1.000
固有ベクトル	0.246	0.327	0.586	-0.700	0.018
	0.461	0.360	0.428	0.687	-0.050
	0.409	0.585	-0.683	-0.153	-0.033
	0.522	-0.452	-0.082	-0.115	-0.710
	0.536	-0.467	-0.036	-0.042	0.701
(b) 相関行列より推定					
固定値	2.4563	1.1448	0.6986	0.4950	0.2053
比率	0.491	0.229	0.140	0.099	0.041
累積比率	0.491	0.720	0.860	0.959	1.000
固有ベクトル	0.342	0.525	0.691	-0.362	-0.012
	0.474	0.314	-0.043	0.820	0.050
	0.387	0.405	-0.717	-0.414	-0.034
	0.503	-0.481	-0.052	-0.147	0.701
	0.505	-0.481	0.071	-0.062	-0.711

表3-12 IBM, ヒュレット・パッカード, インテル, メリルリンチ, モルガン
 スタンレーの株価月次対数収益率の因子分析

(a) 主成分分析法				
	因子負荷量		回転後	
	f_1	f_2	f_1^*	f_2^*
IBM	0.536	0.561	0.011	0.776
HP	0.744	0.335	0.317	0.752
インテル	0.607	0.433	0.151	0.730
メリル	0.788	-0.515	0.928	0.158
モルガン	0.791	-0.514	0.930	0.161
分散	2.4563	1.1448	1.8502	1.7509
比率	0.491	0.229	0.370	0.350
(b) 最尤法				
	因子負荷量		回転後	
	f_1	f_2	f_1^*	f_2^*
IBM	0.191	0.496	0.087	0.524
HP	0.394	0.689	0.247	0.755
インテル	0.250	0.511	0.141	0.551
メリル	0.800	0.072	0.769	0.232
モルガン	0.994	-0.015	0.976	0.186
分散	1.8813	0.9866	1.6324	1.2355
比率	0.376	0.197	0.326	0.247

図3-13 第1主成分とボラティリティ



多変量解析では次元数の増加にともなうパラメータの増大が問題となる。これに対して共通因子に注目する因子分析は多変量を少数のパラメータでとらえようとする。上記5社の月次対数収益率に因子分析を適用した結果の例は表3-12で、相関行列によると共通要素は2つとなり上記と同様の傾向がうかがわれる。もっともさまざまな推定法が提案されている多変量解析では、推定結果にはさらに検討を加えることが必要であるが、ここでみられた示唆として

- 主成分分析法は最尤推定量より変動性が識別できる
- 因子軸の回転により、第1因子は金融関連株が、第2因子はIT株で工業関連株といえる
- バリマックス回転は最尤推定量にさほど影響を与えない
- IBMとIntelの分散は最尤推定量で大きい

などがあげられる。もっとも多変量解析は第1次分析のために行われること、他の情報で検討を続けることが望ましいことはいうまでもない。

ボラティリティ・モデルへの適用についてはつぎのような例がある。

(因子ボラティリティモデル)

多変量ボラティリティ過程の動的構造をとらえる簡便法として、多変量解析で用いられる因子分析モデルが考えられる。ボラティリティ・モデルでは収益率 r_t の期待値との差 $a_t = r_t - \mu_t$ の条件付分散の推移に注目し、ボラティリティの共通因子を推定する。たとえば、共通因子を主成分分析で決め、次のステップで推定することが考えられる。

- (1) a_t の大きな変動要因と考えられるいくつかの因子を、主成分分析により推定する
- (2) 主成分によりボラティリティモデルを構築する
- (3) 系列 a_{it} のボラティリティと主成分のボラティリティを比較、検討する。

(分析例) IBMとS&Pの月次対数収益率によると、まず、2変量AR(3)により得られた a_t の共分散行列から主成分分析を適用すると第1固有値で約82.2%を説明している。ここで第1主因子 $x_t = 0.797a_{1t} + 0.604a_{2t}$ を共通因子とする。次に r_t に主成分分析を適用すると a_t の固有値

に近くなり、共通因子を $x_t = 0.796r_{1t} + 0.605r_{2t}$ とする。このとき共通因子の系列は図 3-13(a) のようになり、推定した x_t に GARCH(1, 1) を適用したときのボラテリテイ過程は

$$x_t = 1.317 + 0.096x_{t-1} + a_t \quad a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = 3.834 + 0.110a_{t-1}^2 \varepsilon + 0.825\sigma_t^2$$

となり、図 3-13(b) のようになる。共通因子モデルをボラテリテイ過程を近似するのに用いることにより、これらの結果を多変量の VaR へ応用することが考えられる。

3. 7 今後の課題

本稿ではファイナンスの分野で進展している実証分析の方法の基本的な部分を紹介した。この分野の分析方法は現在なお進展しておりさまざまな方法について検討することも要求される。また、高頻度データは周波数領域の分析において、従来標本数が十分でなかったことによる問題点を新たな観点からとらえる可能性を持っている。

また、ファイナンスの分野で重視されるリスク分析について、本稿では市場リスクを取り上げたが、信用リスクや流動性リスクについての実証分析も進展している。本稿はそのための出発点である。

参考文献

- (下記以外は、「ファイナンシャル・エコノメトリックスの進展(1)」(立命館経済学54巻 特別号 2005.10参照)
- 安藤美孝「ヒストリカル法によるバリュー・アット・リスクの計測：市場価格変動の非正常性への実務的対応」『金融研究』日本銀行金融研究所 2004
- 安藤美孝「与信ポートフォリオの信用リスクの解析的な評価方法：極限損失分布およびグラニュラリテイ調整を軸に」『金融研究』日本銀行金融研究所 2005
- 家田明「リスク計量とプライシング」朝倉書店 2001
- 大澤真, 村永淳「市場リスク算出の枠組みにおける流動性リスクの計測」IMES Discussion Paper 98-J-2 日本銀行金融研究所 1998
- 小田信之「金融リスクの計量分析」朝倉書店 2001
- 小田信之, 吉羽要直「デリバティブ商品価格から導出可能な市場情報を利用したマーケット分析方法」『金融研究』日本銀行金融研究所 1998
- 北川源四郎, 佐藤整尚, 永原祐一「非ガウス型状態空間表現による確率的ボラテリテイモデルの推定」『金融研究』日本銀行金融研究所 1999
- 北川源四郎, 佐藤整尚「一般化状態空間モデルによる分散変動時系列の解析」『金融研究』日本銀行金融研究所 1999
- ダニエルソン, ジョン, 森本祐司「市場リスクの予測について—EVTとGARCHモデルを用いたVAR算定の比較分析」『金融研究』日本銀行金融研究所 2000
- 日本銀行金融研究所「バリュー・アット・リスク(VaR)の算出とリスク/リターン・シミュレーション」日本銀行月報46(4) 1995
- 牧本直樹「極値理論—極値事象のモデリングと評価」応用経済時系列研究会チュートリアルセミナー資料 2004
- 森本祐司「金融と保険の融合について」『金融研究』日本銀行金融研究所 2000
- 山井康浩, 吉羽要直「バリュー・アット・リスクのリスク指標としての妥当性について—理論的サーベイによる期待ショートフォールとの比較分析」『金融研究』日本銀行金融研究所 2001a

- 山井康浩, 吉羽要直「リスク指標の性質に関する理論的検討— VaR と期待ショートフォール」『金融研究』日本銀行金融研究所 2001b
- 山井康浩, 吉羽要直「期待ショートフォールによるポートフォリオのリスク計測」『金融研究』日本銀行金融研究所 2001c
- 山井康浩, 吉羽要直「市場ストレス時における VAR と期待ショートフォールの比較：多変量極値分布のもとでの比較分析」『金融研究』日本銀行金融研究所 2002
- Anderson, T. G, and Bollerslev, T. “Answering the Skeptics : Yes, Standard Volatility Models Do Provide Accurate Forecasts” IER 1998.
- Anderson, T. G, and Bollerslev, T., F. X. Diebold and P. Labys, “Applications and Case Studies — The Distribution of Exchange Rate Volatility” JASA 2001a.
- Anderson, T. G, and Bollerslev, T., F. X. Diebold and P. Labys, “Modeling and Forecasting Realized Volatility” NBER No. 8160 2001b.
- Anderson, T. G, and T. Bollerslev and S. Lange. “Forecasting Financial Market Volatility : Sample Frequency vis-à-vis Forecast Holizon” J. of Empirical Finance 1999.
- Bamdorff-Nielsen, O. E. and N. Shephard, “Econometric Analysis of Realized Volatility and Its Use in Estimating Stochastic Volatility Models” J. of Royal Stat. Soc. B64 2002.
- Balke, N. S. and T. B. Fomby “Threshold Cointegration” IER 1997.
- Bollerslev T. “Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity” J. of Econometrics 1986.
- Bollerslev, T. “Modelling the Coherence in Short-run Nominal Exchange Rates : A Multivariate Generalized ARCH Model” Review of Economics and Statistics 1990.
- Campbell, J. Y. and L. Hentschel, “No News is Good News, An Asymmetric Model of Changing Volatility in Stock Returns” J. of Financial Economics 1992.
- Cox, D. R. and D. V. Hinkley “Theoretical Statistics” Chapman-Hall 1974.
- Danielsson, J. “The Emperor Has No Clothes : Limits to Risk Modelling” LSE 2001.
- Ebens, H. “Realized Stock Volatility” John Hopkins Univ. 1999.
- Embrechts, P., C. Kuppelberg and T. Mikosch, “Modelling External Events” Springer 1997.
- Engle, R. F. “Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation” Econometrica 1982.
- Engle, R. F., D. M. Lilien, and R. P. Robins, “Estimating Time-Varying Risk Premia in the Term Structure : The ARCH-M model” Econometrica 1987.
- Fama, E. F. “The Behavior of Stock Market Prices” J. of Business 1965.
- French, K. R., G. W. Schwert and R. F. Stambaugh, “Expected Stock Returns and Volatility” J. of Financial Economics 1987.
- Glosten, L. R., R. Jagarmathan and D. E. Runkle, “On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks” J. of Finance 1993.
- Gnedenko, B. V. “Sur la distribution limite du terme maximum d’une série Aléatoire” Annals of Mathematics 1943.
- Harvey, A. C. Ruiz, E. and Shephard, N. “Multivariate Stochastic Variance Models” Review of Economic Studies 1994.
- Heynen, R. C. “Essays on Derivatives Pricing Theory” Erasmus Universiteit Rotterdam 1995.
- Hill, B. M., “A simple general approach to inference about the tail of a distribution” A. of Stat. 1975.
- Hol, E. M. J. H. “Empirical Studies on Volatility in International Stock Markets” Kluwer AP 2003.
- Hosking, J. R. M. “The multivariate portmanteau statistic” JASA 1980.
- Hosking, J. “Fractional Differencing” Biometrika 1981.
- Jenkinson, A. F. “The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) of meteorological

- elements" Quarterly J. of the Royal meteorological Soc. 1955.
- J. P. Morgan "RiskMetrics" Reuters 1996.
- Koenker, R. W. and G. W. Bassett "Regression quantiles" *Econometrica* 1978.
- Leadbetter, M., G. Lindgren and H. Rootzen. "Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes" Springer 1983.
- Li, W. K. and A. I. McLeod "Distribution of the residual autocorrelation in multivariate ARMA time series models" *J. of Royal Stat. Soc. series B* 1981.
- Longin, F. M. "The asymptotic distribution of extreme stock market returns" *J. of Business* 1996.
- Longin, F. M. "Optimal Margin level in futures markets: Extreme price movements" *The Journal of Futures Markets* 1999a.
- Longin, F. M. "From value at risk to stress testing: The extreme value approach" Center for Economic Policy Reserch, London 1999b.
- Lucas, A. A. P. Klaassen, P. Spreij and S. Straetmans "An Analytic Approach to Credit Risk of Large Corporate Bond and Loan Portfolios" *J. of Banking and Finance* 2001.
- Mandelbrot, B. B "The Variation of Certain Speculative Prices," *J. of Business* 1963.
- Martens, M. "Measuring and Forecasting S & P 500 Index-Futures Volatility Using High-Frequency Data" *J. of Futures Markets* 2002.
- Nelson, D. B. "Time Series Behavior of Stock Market Volatility and Returns" MIT Press 1988.
- Nelson, D. B. "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach" *Econometrica* 1991.
- Poon, S. and C. Granger, "Forecasting Financial Market Volatility, A Review" Strathclyde Univ. and Univ. of California 2001a.
- Poon, S. and C. Granger, "Practical Issues in Forecasting Financial Market Volatility" Strathclyde Univ. and Univ. of California 2001b.
- Taylor, S. J. "Modelling Financial Time Series" John wiley and Sons 1986.
- Tiao, G. C. and G. E. P. Box "Modeling multiple time series with applications" *JASA* 1981.
- Tsay, R. S. "Analysis of Financial Time Series — Financial Econometrics" Wiley & Sons 2002.
- Yu, J. "Forecasting Volatility in the New Zealand Stock Market" Univ. of Auckland 2000.