

ファイナンシャル・エコノメトリックスの進展 (2)

——ボラティリティの計測——

浪花貞夫

金融資産価格にみられるボラティリティを解析することは、収益率やポートフォリオ選択における問題に役立たせるだけでなく、デリバティブの価格付け、リスク管理におけるヘッジ方法、VaRの測定などファイナンスにおける多くの分野で重視される基本的な課題である。Anderson-Bollerslev (1998) は、簡潔に“Volatility permeates finance.”とその重要性を要約している。

しかし、ボラティリティをあらかじめ予測することは困難であり、何らかの方法で近似あるいは推定することになる。基本的な方法は標準偏差であるが、Mandelbrot (1963) や Fama (1965) が述べているようにボラティリティは時変であり安定しているわけではない。さらに相場の方向性があり、そこにショックが加わることもある。

ボラティリティの推定方法には、伝統的にヒストリカル・ボラティリティ (HV: Historical Volatility) やインプライド・ボラティリティ (IV: Implied Volatility) がある (後記, VaRを参照)。一方、モデルによる推定方法も多く、代表的な方法に GARCH (Generalized ARCH) モデルと SV (Stochastic Volatility) モデルがある。Engle (1982) の ARCH モデルを一般化しようとした Bollerslev (1986) の GARCH モデルは過去の平方イノベーションと条件付ラグのある分散で定式化され、一方、SV モデルは、初期の Taylor (1986), Nelson (1988) から Harvey et al (1994) らによって展開され、基本的には確率的要素をもつ対数1次 AR 過程で表現している。両者はいずれも1次および2次モーメント、すなわち平均、分散方程式で表現しているが、主な差異は分散の誤差項にあるともいえる。ボラティリティは潜在的な過程であり、過去のデータに基づく HV で十分とらえられない特性を IV や日中の高頻度データを情報としたボラティリティ計測の試みも続けられている。

GARCH モデルに比べて SV モデルは尤度関数による推定の問題もあったが、近年ではさまざまな SV モデルや推定方法が提案されている。

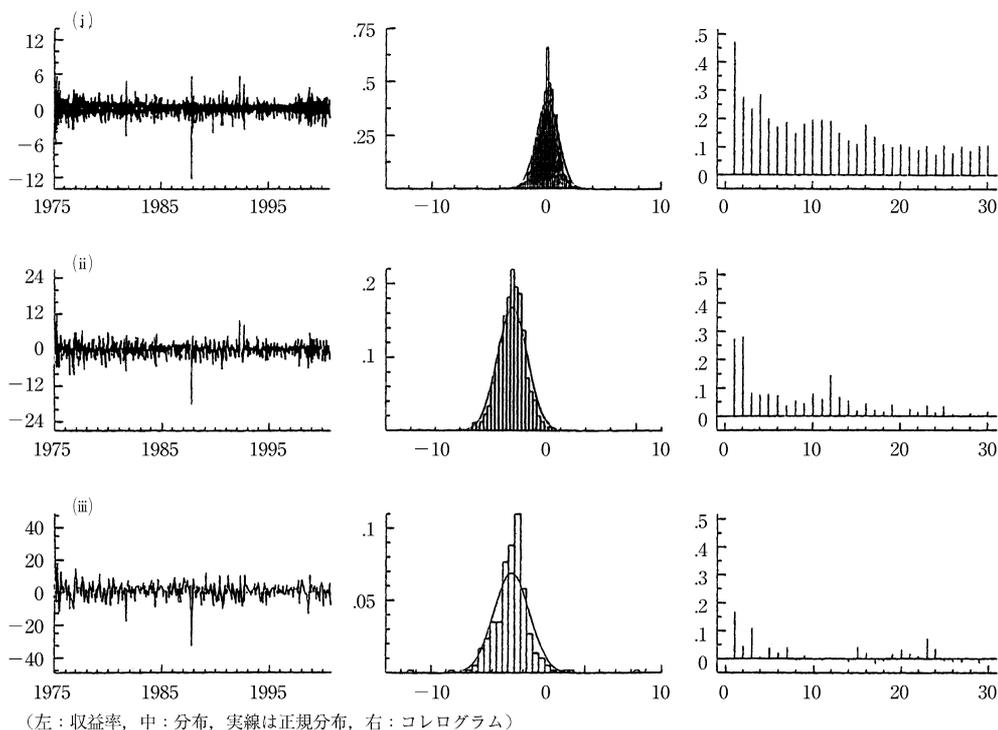
2. 1 資産収益率のボラティリティ

金融資産収益率のボラティリティには系列相関がないという議論の多い一方で、たとえば、Cambell-MacKinlay (1997) の高い自己相関があるという議論も広く受け入れられている。完全に相関があればボラティリティは過去のデータによる分散で推定することも考えられるが、ボラティリティの時間的変化を表現しようとするれば標本数や異常値も考慮しなければならない。それらは近年における時変ボラティリティ・モデルの提案と実用化にみられる。

(株価収益率の例)

図2-1はFT株価指数収益率の系列とコレログラムで、期間は1975. 1. 2から2000. 9. 30

図 2-1 FT 株価指数の収益率 ((i)日次, (ii)週次, (iii)月次)



までの日次, 週次, 月次系列, 標本数はそれぞれ6718, 1344, 310である。収益率は時点 t の株価指数を P_t としたときの百分率

$$y_t = 100 \cdot (\ln P_t - \ln P_{t-1}), \quad t=1, \dots, T$$

で表している。3系列とも平均の回りの振れは異なり, 日次系列のボラティリティは相対的に大きくみえる。1987. 10月のクラッシュはいずれの系列にもみられ, ヒストグラムは尖度が大きく, 非対称性は低頻度系列でより明らかなようにみえる。表 2-1 は基本統計量で, 自己相関係数は, 収益率を 2 乗したときにより顕著になる。

これらの結果は, ボラティリティの時変性, 相場の方向性, 尖度の大きさなどを考慮するとランダムウォークモデルで第 1 近似はできるとしても他のモデルによる分析の必要性を示唆している。

2. 2 時変ボラティリティモデル

代表的な例として, まず GARCH モデルと SV モデルを取り上げ, 後節で状態空間モデルを取り上げる。

GARCH モデル, SV モデルのいずれも 1 次, 2 次モーメントを用い, 平均方程式の一般形は

$$y_t = \mu_t + \sigma_t \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{NID}(0, 1), \quad t=1, \dots, T \tag{2.1}$$

で表す。 y_t は時点 t における金融資産の複利収益率, μ_t は時変条件付平均, ε_t は平均ゼロ, 分散一定, i. i. d. の誤差項である。平均ゼロとするとき (2.1) 式第 1 項は除かれ, 平均方程式は

表 2-1 FT 株価指数の収益率と二乗収益率の基本統計表

頻 度	日 次		週 次		月 次	
標 本 数	6717		1343		309	
	y_t	y_t^2	y_t	y_t^2	y_t	y_t^2
平均	0.057	0.951	0.284	5.760	1.234	34.894
メディアン	0.048	0.277	0.305	1.817	1.607	11.679
分散	0.947	11.575	5.684	445.889	33.480	1551.709
歪度	-0.192	20.874	0.318	14.883	0.477	10.993
尖度	10.937	675.726	11.650	276.560	11.505	139.431
最大	8.943	146.828	22.090	487.971	42.133	1775.231
最小	-12.117	0.000	-17.453	0.000	-32.711	0.000
$(\hat{\rho}_i, i$ 期ラグの自己相関)						
$\hat{\rho}_1$	0.159	0.472	0.102	0.274	0.086	0.168
$\hat{\rho}_2$	0.003	0.278	0.128	0.282	-0.113	0.047
$\hat{\rho}_3$	0.029	0.237	0.015	0.083	0.001	0.110
$\hat{\rho}_4$	0.039	0.287	0.027	0.075	0.015	0.009
$\hat{\rho}_5$	0.018	0.200	0.002	0.078	-0.077	0.039

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t \quad (2. 2)$$

となる。ボラテリリティ過程 σ_t は、たとえば次の 2. 2. 1 および 2. 2. 2 のように表される。

2. 2. 1 GARCH モデル

Engle (1982) の ARCH モデルは Bollerslev (1986) によって一般化が試みられ GARCH モデルとして提案された。その後も多くのモデルが提案されているが、ファイナンスの分野で比較的多く見られるのは GARCH (1, 1) モデル

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha (\sigma_{t-1} \varepsilon_{t-1})^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \quad (2. 3)$$

で、この式は

$$\sigma_t^2 = \omega + (\alpha + \beta) \sigma_{t-1}^2 + \alpha (\sigma_{t-1}^2 \varepsilon_{t-1}^2 - \sigma_{t-1}^2) \quad (2. 4)$$

として、ボラテリリティは係数 $(\alpha + \beta)$ と第 3 項のショックで計測される。s 期ラグの自己相関関数は

$$\text{cor}(y_t^2 y_{t-s}^2) = \rho_s = \rho_1 (\alpha + \beta)^{s-1} \quad s > 1 \quad (2. 5)$$

で近似する。ただし

$$\rho_1 = (\alpha(1 - \alpha\beta - \beta^2)) / (1 - 2\alpha\beta - \beta^2)$$

である。

また Nelson (1991) の提案したレバレッジ効果を導入した EGARCH (1, 1) モデル

$$\ln \sigma_t^2 = \omega + \alpha (|\varepsilon_{t-1}| - \sqrt{2/\pi}) + \gamma \varepsilon_{t-1} + \beta \ln \sigma_{t-1}^2$$

も広く利用されている。

2. 2. 2 SV モデル

よく知られた SV モデルにオプション・プライシングで用いられる Ornstein-Uhlenbeck デイフュージョン過程の離散近似である対数 1 次 AR モデルがある。分散方程式は

$$\sigma_t^2 = \sigma^{*2} 2 \exp \exp(h_t) \tag{2. 6}$$

であり、 σ^{*2} は $h_t = \ln(\sigma_t^2 / \sigma^{*2})$ としたときの正值スケール因子、 h_t は確率過程

$$h_t = \phi h_{t-1} + \sigma_\eta \eta_t \quad \eta_t \sim \text{NID}(0, 1) \tag{2. 7}$$

に従い、係数 ϕ は定常性の条件 $\phi < 1$ を満たす。攪乱項 ε_t , η_t はたがいに無相関である。SV モデルの期待値はゼロ、無条件分散は

$$E(\sigma_t^2) = \sigma^{*2} \exp(0.5 \sigma_\eta^2 / (1 - \phi^2)) \tag{2. 8}$$

で、尖度は

$$\kappa_y = 3 \exp(\sigma_\eta^2 / (1 - \phi^2)) \tag{2. 9}$$

を用い、自己相関関数は

$$\text{corr}(y^2_t, y^2_{t-s}) \approx \phi^s \left(\frac{\exp\left(\frac{\sigma_\eta^2}{1 - \phi^2}\right) - 1}{3 \exp\left(\frac{\sigma_\eta^2}{1 - \phi^2}\right) - 1} \right) \tag{2. 10}$$

で近似する。

対数値による SV モデル

$$\ln \sigma_t^2 = (1 - \phi) \ln \sigma^{*2} + \phi \ln \sigma_{t-1}^2 + \sigma_\eta \eta_t$$

の応用も多い。

GARCH と SV の主な違いは、GARCH モデルでは誤差項は平均方程式にあり、分散は時点 $t - 1$ までの情報を条件としていること、一方 SV モデルでは、平均方程式に 2 つの誤差項をもつことといえる。

(時変 GARCH, SV モデルの応用例)

GARCH (p, q) モデルの適用においてはラグの長さ p, q が注目されるが、多くは低次の GARCH (1, 1) が用いられ、SV モデルにもその傾向がある。Hol (2003) はボラティリティの持続性に注目し、2. 1 節で示した FT 指数の日次、週次データを用いて検討している。モデルの平均方程式は (2. 2) 式で、分散方程式は

$$\text{GARCH}(1, 1) : \sigma_t^2 = \omega + \alpha y_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

$$\text{SV} : \ln \sigma_t^2 = (1 - \phi) \ln \sigma^{*2} + \phi \ln \sigma_{t-1}^2 + \sigma_\eta \eta_t$$

を用いている。

結果は表 2-2, 表 2-3 で、AIC では SV モデルの利点がうかがわれる。Hol はさらに非ガウス型モデルとして t 分布型 GARCH モデルを推定し良好な結果を示している。

2. 3 一般化状態空間モデル

従来の分散変動モデルでは、時系列がランダムウォークにしたがうこと、また、トレンドとボラティリティは無相関を仮定することが多かったが、これらは必ずしも現実的とはいえないことから、北川・佐藤 (1999) は時系列の特性を考慮して非線形状態空間モデルによる方法を提案している。時点 n の原系列 y_n についてトレンド T_n の変化はボラティリティとしての分散 σ_n^2 の変化に影響を与えるものとして、モデルを

$$y_n = T_n + p_n + \sigma_n w_n$$

表 2-2 FT 株価指数の日次収益率推定結果の要約

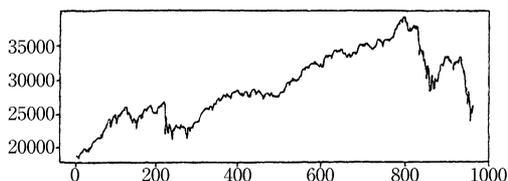
Model	SV Model			GARCH Model	
標本数	6717			6717	
σ^{*2}	0.653		ω	0.018	
	0.525	0.812		0.012	0.024
ϕ	0.986		α	0.086	
	0.977	0.991		0.071	0.102
σ_n^2	0.016		β	0.893	
	0.011	0.023		0.874	0.913
			$\alpha+\beta$	0.980	
AIC	16,540.43			16,741.34	

表 2-3 FT 株価指数の週次収益率推定結果の要約

Model	SV Model			GARCH Model	
標本数	1343			1343	
σ^{*2}	4.147		ω	0.296	
	3.041	5.655		0.117	0.476
ϕ	0.966		α	0.105	
	0.929	0.984		0.072	0.139
σ_n^2	0.037		β	0.838	
	0.020	0.066		0.784	0.893
			$\alpha+\beta$	0.944	
AIC	5,807.88			5,887.51	

注：係数の下は95%信頼水準の係数の範囲

図 2-2 日経225の原系列



$$p_n = \sum_{j=1}^m a_j p_{n-j} + e_n$$

$$T_n = T_{n-1} + \delta T_{n-1} + v_{sn} v_{ln}$$

$$\delta T_n = \delta T_{n-1} + v_{sn}$$

$$\log \sigma_n^2 = \log \sigma_{n-1}^2 + \beta (\delta T_{n-1}) + e_{2n} \quad (2.11)$$

と表している。 p_n は定常時系列成分、 $\sigma_n w_n$ 、 e_n は正規白色ノイズで σ_n は時間とともに変化するものとして時系列の時変分散を表している。 $v_{sn} v_{ln}$ はそれぞれトレンドおよびトレンドの1次階差に対応するノイズ $e_{1n} e_{2n}$ の分散である。このモデルを日経225データ（1987. 1—1990. 8）に適用している。原系列は図 2-2、トレンド、ボラティリティを表すノイズは図 2-3 でトレンド

図 2-3 トレンドとボラティリティの相関を考慮したモデル

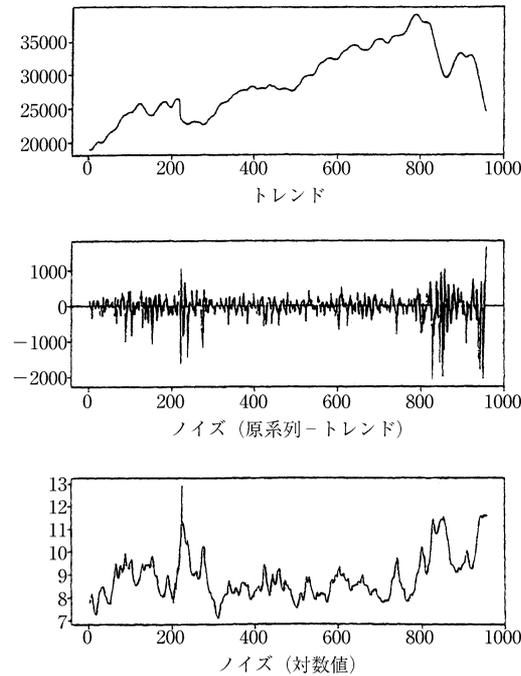


表 2-4 確率的ボラティリティ・モデルと AIC

モデル	AIC
Trend+AR+Noise	
(2.11)式のモデル	13,352
(2.12)式のモデル	13,339

の変化と分散の変化を独立としたモデルより明らかな結果となっている。さらにトレンドの変化が分散の対数変化値の平均に影響を与えるものとして、システムノイズの分布に影響を及ぼす

$$\log \sigma_n^2 = \log \sigma_{n-1}^2 + u_n \tag{2.12}$$

$$u_n \sim (1 - \beta(\delta T_{n-1})) \phi_0(u) + \beta(\delta T_{n-1}) \phi_1(u) \tag{2.13}$$

を推定している。このモデルは二つの分布の混合比 $\beta(x)$ が δT_n の値によって変化する。 $\beta(x)$ を $0 \leq \beta(x) \leq 1$ を満たすように定義することにより δT_n に依存して $\log \sigma_n^2$ の変化を表す。このモデルにより推定した結果を表 2-4 でみると (2.11) 式よりよい結果となり、この区間については株価に比較してボラティリティの変化が小さくなっていることが示されている。

金融時系列のボラティリティは収益率のように原系列の対数階差の変動に関して推定されることが多い。このモデルは非線形状態空間表現により時系列の要因を直接分解することにより当てはまりの良さを示そうとしている。推定はモンテカルロ・フィルタおよび平滑化アルゴリズムを用いている。

2. 4 非ガウス型時変ボラティリティモデル

北川ら (1999) は確率ボラティリティモデルの推定において、従来の近似方法における推定結果に比べて非ガウス型フィルタによる方法がより実用的であろうと考え、日経225の1次階差系列を用いて検討している。

比較のために用いたモデルは次の10種である。

HRS (Harvey-Ruiz-Shephard) :

原系列の2乗 r_n^2 の対数値を用いて

$$\begin{aligned} r_n^2 &= e^\alpha \sigma_n^2 w_n^2 \\ \log r_n^2 &= \alpha + \beta \log \sigma_n^2 + \log w_n^2 \end{aligned} \quad (2. 14)$$

によりパラメータをカルマンフィルタで推定する。ノイズ項 $\log w_n^2$ は正規分布を仮定する。

NG-HRS : (NonGaussian HRS)

(2. 14) 式のノイズ項は χ^2_1 変数の対数分布で、密度関数は

$$\log w_n^2 \sim (1/\sqrt{2\pi}) \exp(w/2 - e^w/2) \quad (2. 15)$$

とし、非ガウス型フィルタで推定する。

KG : (Kitagawa-Gersch)

分散の対数値を観測値の平方和の対数値

$$\log(r_{2m-1}^2 + r_{2m}^2)/2 = \log \sigma_{2m}^2 + \log u_{2m}^2 \quad (2. 16)$$

とし、ノイズ項を正規分布で近似する。

NG-KG : (NonGaussian KG)

(2. 16) 式のノイズ項を二重指数分布

$$\log u_n^2 \sim \exp(u - e^u) \quad (2. 17)$$

として非ガウス型フィルタで推定する。

Direkt :

一般形の状態空間モデルにより直接推定する。

NG-b (NonGaussian モデル, $b=3, 3/2, 1, 3/4, 4/5$)

非線形状態空間モデル

$$\begin{aligned} x_n &= \beta x_{n-1} + v_n \\ r_n &= e^{\alpha/2} e^{x_n/2} \cdot w_n \end{aligned} \quad (2. 18)$$

におけるシステムノイズ v_n の密度関数にピアソンⅦ型の分布を用い、形状パラメータ b を変えた5種のモデルで推定する。 b は形状パラメータ ($0.5 < b < \infty$) で、 $b=1$ のときコーシー分布、 $k \rightarrow \infty$ のとき正規分布である。

推定期間は1987. 1. 1から1990. 8. 31で標本数は961である。計算結果は表2-5で前半の5つのモデルでは(2. 16)式が比較的良く、(2. 18)式のモデルでは $b=1.5$ のときAICは最小となっている。図2-4(1)は点線が $\log \sigma_n^2$ 、実線はNG-HRSでAIC最小の場合、図2-4(2)は推定ボラティリティである。

推定量をシミュレーションにより比較した場合には、パラメータの分散がほとんどの場合

$$\text{HRS} > \text{KG} > \text{NG-HRS}, \text{NG-KG}$$

のような関係がみられる。

表 2-5 確率的ボラティリティモデルの尤度と AIC

Model	対数尤度	AIC
HRS	-2,191.0	13,545.3
NG-HRS	-2,055.3	13,273.9
KG	-886.8	13,338.0
NG-KG	-856.3	13,277.1
Direct	-6,634.0	13,274.0
NG-3.0	-6,630.0	13,266.0
NG-1.5	-6,627.4	13,260.7
NG-1.0	-6,628.6	13,263.1
NG-0.75	-6,630.5	13,266.9
NG-0.6	-6,631.8	13,269.5

表 2-6 非定常モデルの対数尤度と AIC

Model	対数尤度	AIC
HRS	-2,195.2	13,549.7
NG-HRS	-2,063.3	13,286.3
KG	-893.3	13,347.0
NG-KG	-864.2	13,288.9
Direct	-6,642.2	13,286.4
NG-3.0	-6,640.4	13,281.9
NG-1.5	-6,637.7	13,277.4
NG-1.0	-6,638.8	13,279.6
NG-0.75	-6,640.2	13,282.5
NG-0.6	-6,641.4	13,284.7

図 2-4(1) 推定された Volatility (Log)

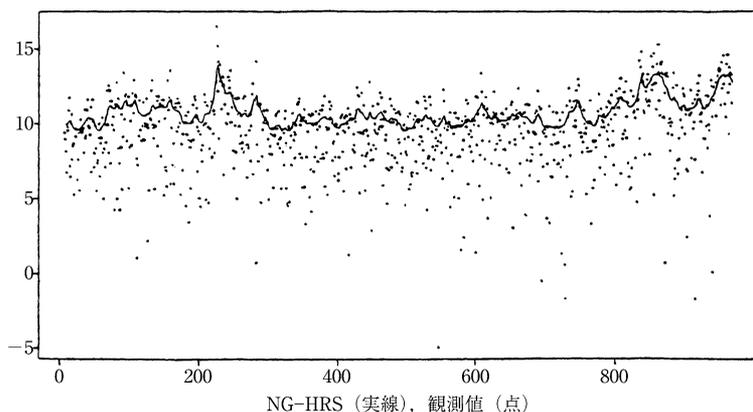
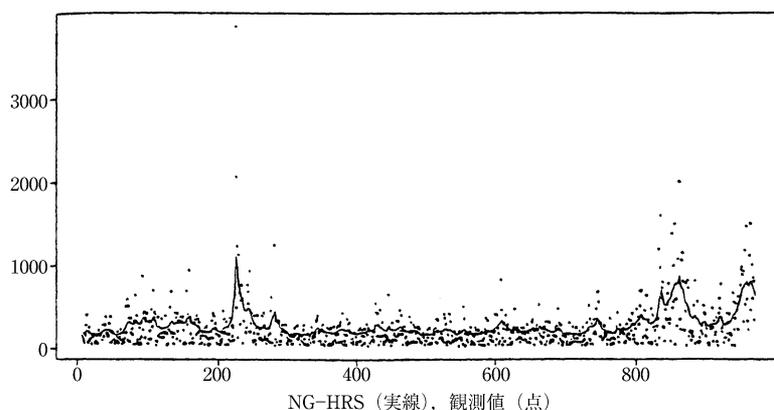


図 2-4(2) 推定された Volatility (絶対値)



2. 5 SVM モデルと世界の株式市場

Cambell et al. (1997) は株価収益率は 1 次の自己相関が非常に高いことを示したが、平均方程式に説明変数を入れた SVM (Stochastic Volatility in Mean) モデルも考えられる。このモデルは

Engle et al. (1987) の ARCH-M に似ているが、ARCH-M が期待収益と期待ボラティリティの関係を推定しようとしているのに対して、SVM は収益とボラティリティの事前の関係とボラティリティのフィードバックを同時に推定しようとしている。

2. 5. 1 SVM モデル

資産収益率を y_t とするとき平均方程式は SV や GARCH のように

$$y_t = \mu_t + \sigma_t \varepsilon_t, \quad \varepsilon \sim \text{NID}(0, 1), \quad t=1, \dots, T \quad (2. 19)$$

として、 μ_t は線形モデル

$$\mu_t = a + \sum_{j=1}^k b_j x_{jt}$$

で表す。SV モデルの分散は

$$\sigma_t^2 = \sigma^{*2} \exp(h_t) \quad (2. 20)$$

$$h_t = \phi h_{t-1} + \sigma_\eta \eta_t \quad \eta_t \sim \text{NID}(0, 1)$$

で、 σ^{*2} は 2. 2. 2 で述べたスケール因子である。また GARCH (1, 1) の分散

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha(\sigma_{t-1} \varepsilon_{t-1}) + \beta \sigma_{t-1}^2 \quad (2. 21)$$

から

$$\mu_t = a + \sum_{j=1}^k b_j x_{jt} + d \sigma^{*2} \exp(h_t) \quad (2. 22)$$

となる。係数 d は平均ボラティリティ効果を表す。分析ではとくに

$$\mu_t = a + b y_{t-1} + d \sigma^{*2} \exp(h_t) \quad (2. 23)$$

も用いられる。パラメータは最尤法およびモンテカルロ法で推定する（推定法はたとえば Hol (2003) 参照）。GARCH-M モデルに倣って平均方程式を

$$\mu_t = a + b y_{t-1} + d(\omega + \alpha(\sigma_{t-1} \varepsilon_{t-1})^2 + \beta \sigma_{t-1}^2) \quad (2. 24)$$

とするモデルも用いられる。

2. 5. 2 条件付ボラティリティ

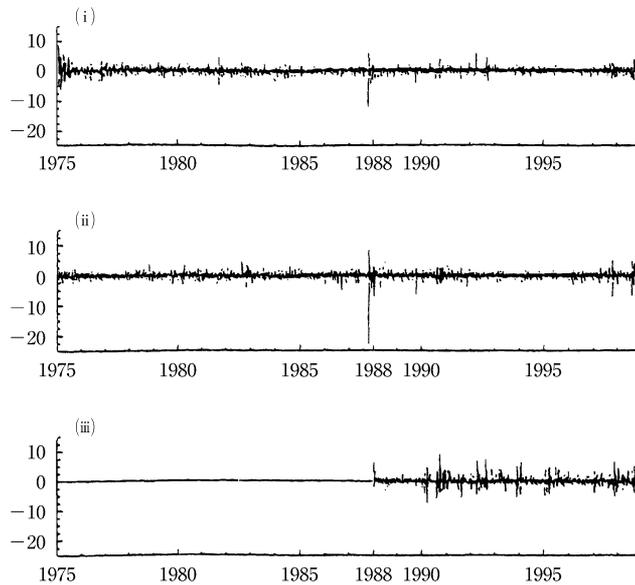
金融資産の期待収益率と条件付ボラティリティの関係は、市場参加者が受け取るニュースの良さ悪さがボラティリティを増大させる主因であるとしても両者の関係は正あるいは負と議論は分かれている（たとえば、French et al. (1987), Cambell-Hentschel (1992), Glosten et al. (1993) など）。分析手法ではレバレッジ効果に注目した Nelson (1991) の EGARCH モデルや Glosten et al. (1993) の GJR-GARCH モデルがあり、それらは時点 $t+1$ における条件付ボラティリティは時点 t における株価の予期しない上昇、下落に非対称的に反応するというものである。一方、SV モデルはボラティリティは同時点で生じるものであり、予期するものと予期せざるもの双方を含めて計測する。予期せざるショックが収益率とボラティリティに与える相関は SV モデルの付加パラメータとして推定される。

y_t を株式の超過収益率とするとき平均方程式を

$$y_t = a + b y_{t-1} + d \sigma_t^2 + \sigma_t \varepsilon_t \quad (2. 25)$$

とする。 σ_t^2 は GARCH モデルでは条件付であるが SV モデルでは平均方程式に含まれ、パラメ

図 2-5 超過収益率 ((i)FT, (ii)S & P, (iii)TOPIX)



ータ d は期待収益率と期待ボラティリティの関係として推定され、両者の関係についての情報を含む。GARCH (1, 1) - M モデルの条件付平均は

$$E_{t-1}(y_t) = a + by_{t-1} + d\{\omega + \alpha(\sigma_{t-1}\varepsilon_{t-1})^2 + \beta\sigma_{t-1}^2\} \tag{2. 26}$$

で、SVM モデルでは

$$E_{t-1}(y_t) = a + by_{t-1} + d\{\sigma^{*2}\exp(\phi h_t)\} \tag{2. 27}$$

である。(2. 26) 式では時点 $t-1$ で説明変数は既知であるが、(2. 27) 式では時点 t におけるボラティリティ過程へのショック $\sigma_t \eta_t$ がある。そこで SVM モデルの平均方程式は

$$y_t = E_{t-1}(y_t) + d\{\sigma^{*2}\exp(\phi h_{t-1})[\exp(\sigma_t \eta_t) - 1]\} + \sigma_t \varepsilon_t \tag{2. 28}$$

となり、(2. 27) 式と整理すると

$$y_t = a + by_{t-1} + d\sigma_{t|t-1}^2 + d\{\sigma_t^2 - \sigma_{t|t-1}^2\} + \sigma_t \varepsilon_t \tag{2. 29}$$

となる。ここで $\sigma_{t|t-1}^2$ は時点 $t-1$ で利用可能な情報が与えられたとき時点 t における条件付分散で期待ボラティリティともいえる。 $\{\sigma_t^2 - \sigma_{t|t-1}^2\}$ はボラティリティ過程における予期せざるショックで、係数 d によりフィードバック効果をとらえようとする。GARCH モデルでは $\sigma_t^2 = \sigma_{t|t-1}^2$ であり、確率的な取り扱いとはいえない。

(分析例)

Hol (2003) は英、米、日の株価指数収益率のボラティリティをそれぞれ FT, S & P, Topix により 1975-1998 の期間と 1987 年のクラッシュ以降の 1988-1998 の期間について分析している。収益率は時点 t における株価 P_t から $R_t = 100(\ln P_t - \ln P_{t-1})$ により、超過収益率は無リスク金利 f を用いて $y_t = R_t - Rf_t$ としている。図 2-5 は超過収益率で表 2-7 は基本統計量である。

図 2-5 で 1987. 10 のクラッシュは S & P で大きい。表 2-7 では Topix のボラティリティが大きい但し当日の影響は小さい。しかし、1990 年代に入り Topix のボラティリティは増大し、平均収益率は負となり歪度は正となっている。また、FT の自己相関関数はラグ 1 で大きい

表 2-7 日次超過収益率の基本統計

期 間	1975—1998		1988—1998		
標 本 数	6261		2869		
指 数	FT All	S & P	FT All	S & P	Topix
平 均	0.033	0.028	0.017	0.042	-0.025
分 散	0.943	0.874	0.584	0.747	1.357
歪 度	-0.194	-2.562	-0.022	-0.664	0.343
尖 度	11.828	62.758	3.491	7.954	6.107
(自己相関)					
$\hat{\rho}_1$	0.167	0.054	0.115	0.004	0.100
$\hat{\rho}_2$	0.008	-0.024	-0.002	-0.013	-0.062
$\hat{\rho}_3$	0.037	-0.021	-0.005	-0.041	-0.009
$\hat{\rho}_4$	0.046	-0.024	0.041	-0.016	0.027
$\hat{\rho}_5$	0.019	0.032	0.009	0.006	-0.030
(2乗値の自己相関)					
$\hat{\rho}_1$	0.478	0.112	0.163	0.176	0.163
$\hat{\rho}_2$	0.281	0.149	0.155	0.087	0.161
$\hat{\rho}_3$	0.238	0.077	0.136	0.049	0.118
$\hat{\rho}_4$	0.290	0.020	0.111	0.087	0.173
$\hat{\rho}_5$	0.202	0.137	0.109	0.097	0.179

表 2-8 SVM モデルによる推定結果

期 間	1975—1998		1988—1998		
標 本 数	6261		2869		
指 数	FT All	S & P	FT All	S & P	Topix
a	0.038	0.045	0.061	0.074	0.019
	0.014	0.017	0.016	0.038	-0.014
b	0.146	0.074	0.100	0.024	0.099
	0.100	0.054	0.006	0.009	0.067
d	-0.011	-0.023	-0.085	-0.046	-0.031
	-0.049	-0.003	-0.176	-0.103	-0.006
σ^{*2}	0.615	0.597	0.458	0.539	0.832
	0.488	0.100	0.438	0.427	0.642
ϕ	0.984	0.979	0.976	0.970	0.966
	0.977	0.909	0.956	0.954	0.947
σ_{η}^2	0.018	0.021	0.019	0.035	0.058
	0.014	0.015	0.012	0.025	0.041
AIC	15075.6	15005.6	6090.7	6610.7	7988.7

注：係数の下は95%信頼水準の最小値

1980年代以降は小さくなっている。1次の自己相関が大きいのは非同時取引の影響かボラティリティの集中により取引が薄かったことによるともいえる。

SVM モデル (2. 19), (2. 20), (2. 29) の推定結果は表 2-8 で、ボラティリティ σ^{*2} はすべて有意であるが、クラッシュ以降の Topix は大きく全期間の FT をも上回っている。 ϕ は総

じて近い値となっている。Hol はこれらの結果から SVM モデルは変動の様子をよくとらえているとしているが、結果は French et al. (1987) の日次データによる ARIMA モデルによる米国の例と類似しているとも述べている。

SVM モデルにおける条件付分散と超過収益率を同時に推定した結果を表 2-8 から要約すると、第 1 に弱い負の関係がみられ、GARCH-M の多くが正の関係を示したのとは対称的である。また係数 d の符号も GARCH-M と異なり、ボラティリティのフィードバック効果は後者が大きい。いわば事後的なフィードバック効果といえる。第 2 に、平均、分散を同時に推定したモデルはボラティリティ系列の当てはまりがよい。 b の推定値もロバストである。第 3 は、SVM モデルの利点として誤差項 ε_t の平均の影響は小さい。これらから SV モデルは GARCH モデルに匹敵すると述べている。

2. 5. 3 ボラティリティ・モデルと予測

Hol (2003) は、まずランダムウォークモデル (RW), GARCH (1, 1), SVM を用いて予測精度を検討している。予測精度は予測期間が長くなるにつれて GARCH が滑らかに減少するのに対して SVM は減少する前に上昇を示している。これは SVM のボラティリティ過程は対数形で表現され誤差項の予測式に用いられていること、 h_t には誤差項 η_t を含み分散 σ_η^2 の影響が大きいことによると思われる。このような性質を考慮して FT (英), S & P (米) Topix (日), DAX (独), CAC (仏), AEX (蘭) の 6 カ国株価指数について検討している。

取り上げた予測モデルは次の 4 つである。

$$RW \quad : \sigma^2_{T+1, T+N|T} = (N/n) \sum_{t=0}^{n-1} y^2_{T-t} \quad (2. 30)$$

$$EWMA \quad : \sigma^2_{T+1, T+N|T} = N[(1-\phi)\sigma^2_{T|T} + \phi(1/L) \sum_{t=0}^{L-1} y^2_{T-t}] \quad (2. 31)$$

$$SV \quad : \sigma^2_{T+1, T+N|T} = \sigma^{*2} \sum_{j=1}^N \exp(h_{T+j|T} + 0.5p_{T+j|T}) \quad (2. 32)$$

$$GARCH : \sigma^2_{T+1, T+N|T} = \sum_{j=1}^N [\omega / (1-\alpha-\beta) + (\alpha+\beta)^{j-1} (\sigma^2_{T+1|T} - \omega / (1-\alpha-\beta))] \quad (2. 33)$$

RW は時変ではなく、EWMA は指数平滑移動平均モデルで指数平滑モデルの y^2_T を移動平均項で置き換えている。 N は予測期間で、 $N=1, 2, 5, 20$, n は標本数、 L は移動平均の項数、 $0 < \phi \leq 1$ は平滑子で、収益率は $y_t = 100(\ln P_t - \ln P_{t-1})$ を用いている。

表 2-9 は要約表で、英国の FT のボラティリティは小さい。歪度は小さいが尖度は大きい。独の DAX の変動は大きい。決定係数からみた OLS の予測結果は表 2-10、平方平均誤差 (RMSE) からみた結果は表 2-11 で、RW より SV がよい結果となっている。表 2-11 の RMSE でも同様で、例外は FT である。これらの結果では、SV, GARCH が望ましいといえるが、評価基準にかなり敏感であることに注意を要する。Heynen (1995), Yu (2000) は同様な結果を示している。

2. 6 インプライド・ボラティリティを含むモデル

インプライド・ボラティリティ (IV) はオプション価格モデルにより市場価格との関係で得ら

表 2-9 日次株価収益率の基本統計

期 間	1988—1999						
標 本 数	3130						
指 数	FT All	S & P	Topix	DAX	CAC40	AEX	
平 均	0.042	0.057	-0.000	0.062	0.057	0.069	
分 散	0.612	0.788	1.354	1.521	1.371	1.140	
歪 度	-0.029	-0.546	0.303	-0.784	-0.168	-0.310	
尖 度	3.032	6.627	5.674	9.977	2.878	4.855	
最 大	5.698	4.989	9.116	7.288	6.808	6.636	
最 小	-4.147	-7.113	-7.365	-1.371	-7.573	-6.792	
(自己相関)							
$\hat{\rho}_1$	0.153	0.166	0.157	0.192	0.142	0.168	
$\hat{\rho}_2$	0.149	0.088	0.160	0.090	0.158	0.235	
$\hat{\rho}_3$	0.135	0.049	0.113	0.099	0.139	0.155	
$\hat{\rho}_4$	0.106	0.084	0.171	0.075	0.116	0.257	
$\hat{\rho}_5$	0.112	0.095	0.170	0.078	0.126	0.131	

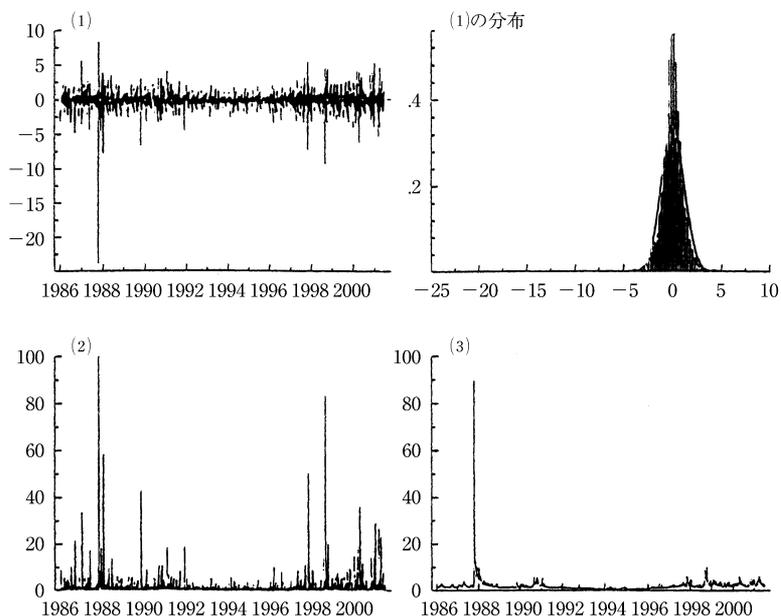
表 2-10 決定係数からみた OLS の予測

株価指数	モデル	予測期間（日）		
		1	5	10
FT All:	RW	0.006	0.016	0.020
	EWMA	0.141	0.347	0.414
	SV	0.146	0.373	0.421
	GARCH	0.147	0.370	0.414
S & P:	RW	0.003	0.009	0.014
	EWMA	0.029	0.084	0.105
	SV	0.047	0.110	0.142
	GARCH	0.038	0.096	0.120
Topix:	RW	0.013	0.037	0.054
	EWMA	0.072	0.183	0.212
	SV	0.081	0.198	0.227
	GARCH	0.082	0.193	0.211
DAX:	RW	0.000	0.001	0.001
	EWMA	0.086	0.197	0.235
	SV	0.127	0.273	0.312
	GARCH	0.115	0.233	0.258
CAC:	RW	0.005	0.013	0.017
	EWMA	0.087	0.212	0.257
	SV	0.109	0.255	0.302
	GARCH	0.106	0.241	0.279
AEX:	RW	0.002	0.008	0.010
	EWMA	0.123	0.261	0.280
	SV	0.157	0.354	0.380
	GARCH	0.149	0.334	0.360

表 2-11 RMSE からみた予測

株価指数	モデル	予測期間（日）		
		1	5	10
FT All:	RW	1.517	4.690	8.383
	EWMA	1.399	3.784	6.478
	SV	1.393	3.679	6.323
	GARCH	1.386	3.617	6.188
S & P:	RW	3.028	8.699	14.321
	EWMA	2.985	8.409	13.973
	SV	2.915	7.883	12.522
	GARCH	2.930	7.982	12.838
Topix:	RW	2.990	8.583	14.370
	EWMA	2.941	8.143	13.953
	SV	2.284	7.754	12.794
	GARCH	2.884	7.914	13.291
DAX:	RW	4.676	14.648	25.326
	EWMA	4.469	13.313	22.945
	SV	4.340	12.311	20.709
	GARCH	4.350	12.473	21.061
CAC:	RW	3.402	10.213	17.472
	EWMA	3.273	9.359	16.002
	SV	3.225	8.949	14.982
	GARCH	3.217	8.906	14.897
AEX:	RW	3.986	13.009	23.464
	EWMA	3.668	10.923	19.732
	SV	3.582	9.998	17.549
	GARCH	3.582	9.981	17.440

図 2-6 S & P の日次収益率(1), 二乗収益率(2), VIX (3)



れ、ヒストリカル・ボラティリティ (HV) よりは利用されることが多い (ボラティリティのパフォーマンス評価については、たとえば、Poon-Granger (2001a), (2001b))。したがって推定にどのようなモデルを用いるかによるが、ブラック・ショールズのオプション価格モデルは基本的なモデルとして用いられることが多い。

IV はある条件の下での情報集合を仮定しているといえる。そこで GARCH と SV モデルの分散方程式に外生変数として IV を付加した SVX (SV with exogenous variables) モデルや SIV (Stochastic Implied Volatility) モデルも提案されている。

SV モデルに IV を加えた SVX モデルは

$$h_t = \phi h_{t-1} + \gamma x_{t-1} + \sigma_\eta \eta_t \tag{2. 34}$$

とする。ここで x_{t-1} は対数値のラグ付 IV

$$x_{t-1} = \ln \sigma_{IV,t-1}^2$$

で、係数 ϕ の条件は $-1 < \phi < 1$ である。

また

$$h_t = \phi h_{t-1} + \gamma(1 - \phi L)x_{t-1} + \sigma_\eta \eta_t \tag{2. 35}$$

のように定義した SVX モデルを SVX+モデルとする。これは対数分散式

$$\ln \sigma_t^2 = \ln \sigma^{*2} + \gamma x_{t-1} + \sigma_\eta \sum_{i=1}^{J-1} \phi^i \eta_{t-i}$$

を逐次代入するとき IV のラグ部分を加えていない。IV すなわち $\sigma_{IV,t}^2$ をボラティリティの予測子とするとき $\ln \sigma_{IV,t}^2$ のバイアスを定数項で示そうとしている。

また $\phi=0$ とした制約付きボラティリティモデルの h_t を

$$h_t = \gamma x_{t-1} + \sigma_\eta \eta_t \tag{2. 36}$$

表 2-12(1) S & P と VIX の基本統計

期 間	1986—2001			1988—2001		
標 本 数	3906			3401		
系 列	S & P100		VIX	S & P100		VIX
	R_t	R_t^2	σ^2_{IVt}	R_t	R_t^2	σ^2_{IVt}
平 均	0.046	1.325	1.954	0.049	1.069	1.774
分 散	1.323	93.042	7.260	1.067	9.035	1.395
歪 度	-2.513	50.699	18.764	-0.428	12.585	1.802
尖 度	51.584	290.865	503.698	6.008	250.746	5.280
最 大	8.539	561.214	89.521	5.606	83.258	9.668
最 小	-23.690	0.000	0.324	-9.125	0.000	0.324
(自己相関)						
$\hat{\rho}_1$	-0.019	0.166	0.792	-0.017	0.226	0.960
$\hat{\rho}_2$	-0.066	0.136	0.630	-0.045	0.090	0.932
$\hat{\rho}_3$	-0.035	0.070	0.628	-0.040	0.055	0.914
$\hat{\rho}_4$	-0.023	0.026	0.605	0.001	0.095	0.900
$\hat{\rho}_5$	0.021	0.128	0.574	-0.025	0.142	0.876

表 2-12(2) S & P 株価指数の推定値

期 間	1986—2001				1988—2001			
標本数	3906				3401			
モデル	SV	SVX	SVX+	SIV	SV	SVX	SVX+	SIV
σ^{*2}	0.804	0.431	0.432	0.432	0.780	0.430	0.429	0.431
	0.627	0.403	0.403	0.403	0.573	0.400	0.400	0.401
ϕ	0.977	-0.050	0.013		0.984	-0.133	-0.128	
	0.965	-0.238	-0.190		0.972	-0.338	-0.351	
γ		1.097	1.043	1.044		1.205	1.066	1.063
		1.025	0.974	0.975		1.120	0.991	0.987
σ_η^2	0.032	0.417	0.413	0.415	0.021	0.363	0.363	0.363
	0.022	0.346	0.340	0.344	0.013	0.288	0.287	0.287
AIC	10626.72	10422.34	10422.60	10420.62	8988.78	8818.26	8818.60	8817.68

注：表 2-8 の注記参照

とするとき

$$\ln \sigma_t^2 = \ln \sigma^{*2} + \gamma x_{t-1} + \sigma_\eta \eta_t$$

を SIV モデルと呼び、ボラテリテイ過程は IV と誤差項で推定する。

(分析例)

Hol は S & P 100 日次株価指数の日次収益率 $R_t = 100 (\ln P_t - P_{t-1})$ 、期間は 1986. 1. 2—2001. 6. 29 により分析している。IV はシカゴ・オプション取引所市場ボラテリテイ指数 (VIX: Chicago Board Options Exchange Market Volatility Index) を用いている。

データの要約は図 2-6 で 1987. 10 のクラッシュが結果に影響を与えることから、1988. 1. 4 からの標本も用いている。要約は表 2-12(1) である。

取り上げたモデルは SV モデルと制約をおいた SV モデル

$$\begin{aligned} \text{SV} & : h_t = \phi h_{t-1} + \sigma_\eta \eta_t \\ \text{SVX} & : h_t = \phi h_{t-1} + \gamma x_{t-1} + \sigma_\eta \eta_t \\ \text{SVX+} & : h_t = \phi h_{t-1} + \gamma(1 - \phi L)x_{t-1} + \sigma_\eta \eta_t \\ \text{SIV} & : h_t = \gamma x_t + \sigma_\eta \eta_t \end{aligned}$$

で、表 2-12(2)の結果をみると、ボラテイルティ情報を含む SVX と SVX+ が良いといえる。さらにこれらのモデルについて予測を行い、外挿結果では SIV モデルがよい結果を与えている。

2. 7 高頻度データとボラテイルティ

日次の事後ボラテイルティは日次収益率の累積平方データで近似され、ノイズによって実際のボラテイルティから乖離するが、標本数を増加させることでノイズの影響を減少させる可能性があるという議論は、たとえば、Andersen-Bollerslev (1998) の GARCH モデルによる為替レートの日次予測にみられ、従来の結果より現実的であること、さらに Poon et al. (2001) は株価指数について同様な傾向のみられることを示している。

また、Andersen et al. (1999) は GARCH モデルによる高頻度データのボラテイルティ外挿で、日次、週次、月次系列について分析したところ、1 時間間隔の系列による結果が良好で、1 時間以内のサンプルでは必ずしも良い結果とはいえないことがあると述べている。また、長記憶をとらえようとする Ebens (1999), Andersen et al. (2001b) の ARFIMA-RV (autoregressive fractionally integrated moving average realized volatility) モデルや Barndorff et al. (2002) の Ornstein-Uhlenbeck (OU) 過程によるモデルによる実証例もある。

2. 7. 1 株価収益率とボラテイルティの例

S & P 100 株価指数における取引価格 P により Hol (2003) は 1997. 1. 6 から 2000. 12. 29 の 5 分間隔データを基にして、まず収益率を

$$R_{td} = 100(\ln P_{td} - \ln P_{t-d}) \quad d \geq 1 \quad t = 1, \dots, T \tag{2. 37}$$

として推定している。 R_{td} は取引日 t における d 時点の収益率である。NYSE は東部時間 9.30am から 4.00pm であるので 1 日当たり 78 個の標本と時間外取引がある。時間外取引は

$$R_m = 100(\ln P_{t0} - \ln P_{t-1D}) \quad D = 78$$

とする。 P_{t-1D} は前日の 4.00p. m., P_{t0} は取引日の 9.30a. m. である。ただし、クリスマスイブのように終了時間が早いときもある。図 2-7 は収益率とその二乗値、それらの統計量は表 2-10 である。 R_t には自己相関はみられないが R_t^2 では 1 次の自己相関がやや大きい。

日中のボラテイルティに関する分析では、日次平方収益率ではリアライズド・ボラテイルティを必ずしもよくとらえていないので、累積平方和

$$\sigma_{t1}^2 = R_{tN}^2 + \sum_{d=1}^D R_{td}^2 \tag{2. 38}$$

を用いることも提案されている。しかし株式取引では夜間の変動も大きく日次のボラテイルティではこれを考慮する必要がある。たとえば取引時間中の

$$\sigma_{t2}^2 = \sum_{d=1}^D R_{td}^2$$

図2-7 S & P 株価指数(1)日次収益率 R_t と(2)その二乗値 R_t^2

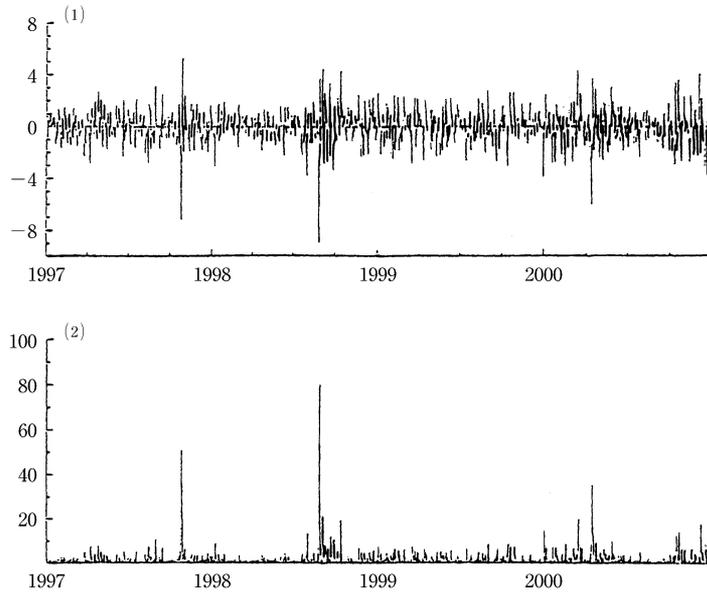


表2-13 R_t, R_t^2 の基本統計

期 間	1997—2000	
標 本 数	1004	
系 列	R_t	R_t^2
平 均	0.063	1.673
分 散	1.670	16.576
歪 度	-0.447	10.490
尖 度	4.024	164.548
(自己相関)		
$\hat{\rho}_1$	-0.001	0.254
$\hat{\rho}_2$	-0.066	0.059
$\hat{\rho}_3$	-0.037	0.017
$\hat{\rho}_4$	0.010	0.042
$\hat{\rho}_5$	-0.040	0.122

表2-14 リアライズド・ボラティリティの基本統計

期 間	1997—2000			
標 本 数	1004			
系 列	$\hat{\sigma}_{t,1}^2$	$\hat{\sigma}_{t,3}^2$	$\ln \hat{\sigma}_{t,1}^2$	$\ln \hat{\sigma}_{t,3}^2$
平 均	1.372	1.359	0.017	0.020
分 散	2.207	2.053	0.527	0.508
歪 度	5.299	5.185	0.451	0.430
尖 度	43.725	40.992	0.559	0.601
(自己相関)				
$\hat{\rho}_1$	-0.583	0.572	0.622	0.609
$\hat{\rho}_2$	0.373	0.392	0.541	0.532
$\hat{\rho}_3$	0.318	0.323	0.502	0.484
$\hat{\rho}_4$	0.300	0.296	0.460	0.443
$\hat{\rho}_5$	0.296	0.261	0.427	0.400

を応用した例で、Martens (2002) はスケール因子 $c \leq 0$ を用いて

$$\sigma_{t,3}^2 = (1+c) \sum_{d=1}^D R_{td}^2$$

により検討している。

表2-14は $\sigma_{t,1}^2, \sigma_{t,3}^2$ の要約で $\sigma_{t,1}^2$ はやや大きい。表2-13と比べると変動幅は大きく、歪度、尖度も大きい。

2. 7. 2 リアライズド・ボラティリティモデル (RV)

まず、リアライズド・ボラティリティを直接モデル化した UC-RV (Unobserved Components

Realized Volatility) モデルと ARFIMA-RV (Autoregressive fractionally integrated moving average Realized Volatility) モデルを取り上げる。後者は対数値で定義される。

2. 7. 2. 1 観測されない要素の OU 型 SV モデル

リアライズド・ボラティリティ (RV) と推定ボラティリティとの議論には注目すべきものが多い。ここでは独立 OU 過程から構成される連続過程

$$\sigma^2(t) = \sum_{j=1}^J \tau^j(t)$$

$$d\tau^j(t) = -\lambda_j \tau^j(t) dt + dz_j(\lambda_j t)$$

によるモデル化を考える。 $\sigma^2(t)$ は RV の連続過程, $z_j(t)$ は非負増分の独立 Levy 過程, λ_j は未知のパラメータで, j は実際には 3 あるいは 4 のような小さな値をとる。

ここから離散時間の RV は, 間隔 Δ について

$$\sigma^2_t = \sum_{j=1}^J \tau^j_t$$

とする。 τ^j_t は $\exp(-\lambda_j \Delta)$ で決まる係数をもつ ARMA (1, 1) で表す。このとき RV は

$$\tilde{\sigma}^2_t = \sigma^2_t + u_t$$

で与えられる。 u_t は平均ゼロ, 分散は間隔 Δ に依存するホワイトノイズである。ここで UC-RV モデルを

$$\tilde{\sigma}^2_t = \sigma^2_t + u_t$$

$$\sigma^2_t = \mu + \phi(\sigma^2_{t-1} - \mu) + \theta \eta_{t-1} + \eta_t \tag{2. 37}$$

で表す。状態空間表現では

$$\sigma^2_t = Z\alpha_t + u_t$$

$$\alpha_{t+1} = T\alpha_t + R\eta_t \tag{2. 38}$$

とするとき

$$Z = (1 \ 0 \ 0), \quad T = \begin{pmatrix} \phi & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R' = (1 \ \theta \ 0)$$

とする。ARMA (1, 1) のパラメータは ϕ, θ, σ_u である。

2. 7. 2. 2 ARFIMA モデル

ARFIMA (1, d, 1) モデルは平均 μ として

$$(1 - \phi L)(1 - L)^d (y_t - \mu) = (1 + \theta L)\varepsilon_t \tag{2. 39}$$

とする。パラメータには

$$0 < d < 0.5, \quad |\phi| < 1, \quad |\theta| < 1, \quad \sigma^2 > 0$$

の制約を与えて推定する。

2. 7. 3 日次時変ボラティリティモデル

ボラティリティを日次収益率の 2 次モーメントとして時変モデル化する。これは, SV, GARCH 族を含むといえる。

表 2-15 S & P 外挿結果の誤差

モデル		予 測 期 間				
		N=1	N=2	N=3	N=4	N=5
UC-RV	HRMSE	0.6546	0.6326	0.6394	0.6108	0.6040
ARFIMA-RV	HRMSE	0.6401	0.5613	0.5383	0.5144	0.5058
SV	HRMSE	0.8583	0.7503	0.7070	0.6823	0.6648
SVX	HRMSE	0.6684	0.5984	0.5842	0.5555	0.5432
GARCH (1,1)	HRMSE	1.0093	0.8835	0.8374	0.8154	0.7999
GX	HRMSE	0.9031	0.8659	0.8787	0.8248	0.7954

HRMSE 平方平均誤差

2. 7. 3. 1 日中ボラティリティを考慮した日次 SV モデル

$$\begin{aligned}
 y_t &= \sigma_t \varepsilon_t \\
 \sigma_t^2 &= \sigma^{*2} \exp(h_t) \\
 h_t &= \phi h_{t-1} + \sigma \eta_t
 \end{aligned} \tag{2. 40}$$

とするとき日中のボラティリティ付き SV モデルは (2. 40) 式の SV モデルの拡張として分散方程式の説明変数に日中のボラティリティを考慮し

$$\begin{aligned}
 h_t &= \phi h_{t-1} + \gamma x_{t-1} + \sigma \eta_t \\
 -1 < \phi < 1
 \end{aligned} \tag{2. 41}$$

とする。

2. 7. 3. 2 日中ボラティリティを考慮した日次 GARCH モデル

GARCH (1, 1) モデルを

$$\begin{aligned}
 y_t &= \sigma_t \varepsilon_t \\
 \sigma_t^2 &= \omega + \alpha (\sigma_{t-1} \varepsilon_{t-1})^2 + \beta \sigma_{t-1}^2
 \end{aligned} \tag{2. 42}$$

とするとき、日中のボラティリティ付き GARCH モデルは GARCH (1, 1) モデルを拡張し、分散方程式に日中のボラティリティを含め (2. 42) 式における σ_t^2 を

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha (\sigma_{t-1} \varepsilon_{t-1})^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 + \gamma x_{t-1} \tag{2. 43}$$

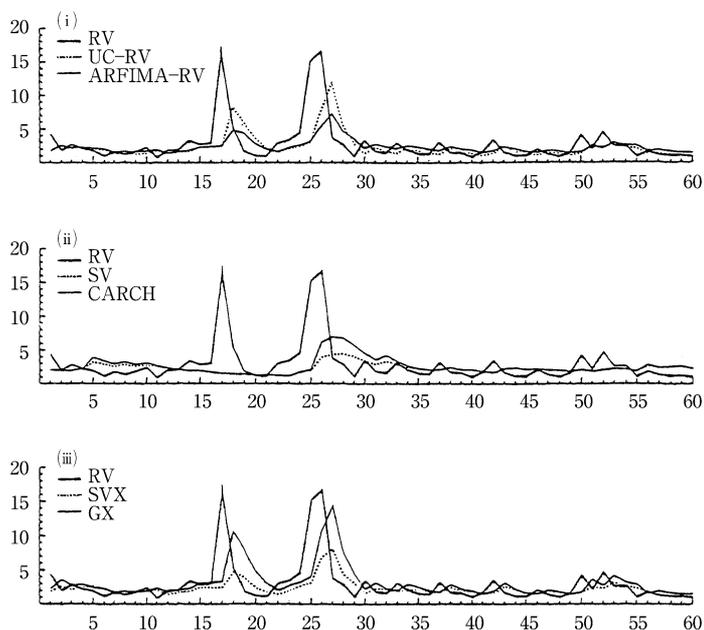
とする。

(予測精度の検討)

Hol (2003) は、これらのモデルを含めた次のモデルで予測を行っている。

$$\begin{aligned}
 \text{UC-RV} & : \sigma_{t+3}^2 = \sigma_t^2 + u_t \\
 & : \sigma_t^2 = \mu + \phi (\sigma_{t-1}^2 - \mu) + \theta \eta_{t-1} + \eta_t \\
 \text{ARFIMA-RV} & : (1 - \phi L)(1 - L)^d \ln \sigma_{t+3}^2 = \mu + u_t \\
 \text{SV} & : y_t = \sigma_t \varepsilon_t \\
 & : \ln \sigma_t^2 = (1 - \phi) \ln \sigma^{*2} + \phi \ln \sigma_{t-1}^2 + \sigma \eta_t \\
 \text{SVX} & : y_t = \sigma_t \varepsilon_t
 \end{aligned}$$

図 2-8 ボラテリテイ予測結果



$$\ln \sigma_t^2 = (1 - \phi) \ln \sigma^{*2} + \phi \ln \sigma_{t-1}^2 + \gamma_t \ln \sigma_{t-1}^2 + \sigma_\eta \eta_t$$

GARCH (1, 1) : $y_t = \sigma_t \varepsilon_t$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha (\sigma_{t-1}^2 \varepsilon_{t-1}^2) + \beta \sigma_{t-1}^2$$

GX : $y_t = \sigma_t \varepsilon_t$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha (\sigma_{t-1}^2 \varepsilon_{t-1}^2) + \beta \sigma_{t-1}^2 + \gamma_i i \sigma_{t-1}^2$$

表 2-15, 図 2-8 は推定結果で, 要約すると予測精度では ARFIMA-RV, SVX, UC-RV が比較的良好であり, また, 日中のボラテリテイ情報による SV モデルも注目される。

本節ではボラテリテイのモデル化において SV モデルの拡張形を用いたが, 実際にはさまざまなモデルが提案されており, とくに近年の高頻度データに関するボラテリテイ・モデリングによる検討は金融市場を理解するうえで注目される。これらの分野における研究は今後の課題であるともいえる。

参考文献

(「ファイナンシャル・エコノメトリックスの進展(3)」 (立命館経済学第55巻第5・6号) 参照)