ブラウン運動・確率微分方程式・利子率の期間構造のモデル

浅井　　　学

1　はじめに

本稿の目的は，利子率の期間構造のモデルを紹介することにある。そのためにはブラウン運動や確率微分方程式に関する知識が必要である。第2節ではブラウン運動について解説する。さらに第3節では確率微分方程式について，特に伊藤の変換公式やギルサノフの定理を中心に説明する。第4節では利子率の期間構造のモデルを，実証分析を念頭に置きながら解説する。

2　ブラウン運動

確率空間 $(\Omega, \boldsymbol{F}, P)$ において，実数 $R \stackrel{def}{=} (-\infty, \infty)$ を状態空間にもつ連続時点の確率過程 $\{X(t), t \geq 0\}$ は，次の性質を満たす時ブラウン運動であると定義される。

（A 1）増分 $X(s+t)-X(s)$，$t>0$ は正規分布 $N(0, \sigma^2 t)$ に従う。

（A 2）任意の時点 $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n < \infty$ について，n 個の確率変数

$$X(t_1)-X(t_0),\ X(t_2)-X(t_1), \ldots,\ X(t_n)-X(t_{n-1})$$

は独立。

（A 3）$X(0)=0$ で，$X(t)$ は $t=0$ において連続である。

特に $\sigma^2=1$ であるブラウン運動を標準ブラウン運動と呼び，以降 $\{B(t), t \geq 0\}$ と書く。

2．1　移動係数をもつブラウン運動

標準ブラウン運動 $\{B(t), t \geq 0\}$ を使って

$$X(t)=\sigma B(t)+\mu t,\quad t \geq 0 \tag{1}$$

で定義される確率過程を考える。

$B(s+t)-B(s) \sim N(0, t)$ であるから，$\{X(t), t \geq 0\}$ の増分

$$X(s+t)-X(s)=\sigma(B(s+t)-B(s))+\mu t,\quad t \geq 0$$

は正規分布 $N(\mu t,\ \sigma^2 t)$ に従う。またブラウン運動 $\{B(t),\ t\geq 0\}$ は独立増分をもつので(1)式より $\{X(t),\ t\geq 0\}$ も独立増分をもつ。故に(1)式で定義された確率過程もブラウン運動である。(1)式における μ をドリフト係数，σ^2 を拡散係数と呼ぶ。

ここで μ と σ^2 の意味を調べる。今 $X(t)=x$ とし，微小時間区間 $(t,\ t+h)$ における増分

$$\Delta_h X(t)=X(t+h)-X(t),\quad h>0$$

を考える。(1)式より

$$\Delta_h X(t)=\sigma\Delta_h B(t)+\mu h,\quad h>0$$

である。$\Delta_h B(t)$ は $B(t)$ の状態，つまり $X(t)$ の状態に無関係に正規分布 $N(0,\ h)$ に従っているので，

$$E[\Delta_h X(t) \mid X(t)=x]=\mu h$$

$$E[(\Delta_h X(t))^2 \mid X(t)=x]=\sigma^2 h+\mu^2 h^2$$

である。よってすべての x に対して

$$\begin{cases} \lim_{h\to 0}\dfrac{1}{h}E[(\Delta_h X(t) \mid X(t)=x]=\mu \\ \lim_{h\to 0}\dfrac{1}{h}E[\Delta_h X(t))^2 \mid X(t)=x]=\sigma^2 \end{cases} \qquad (2)$$

(2)式は $X(t)=x$ のときの増分の無限小平均が μ で無限小分散は σ^2 であることを示している。

2．2 ランダムウォークとブラウン運動

$X_1, X_2\ldots$ をベルヌーイ試行とし，

$$P[X_t=1]=p,\quad P[X_t=-1]=1-p,\quad 0<p<1,\quad t=1,2,\ldots$$

とする。このとき部分和

$$W_t=W_0+\sum_{i=1}^{t}X_i,\quad t=1,2,\ldots$$

で定義される確率変数列 $\{W_t,\ t=0,1,2\ldots\}$ をランダムウォークとよぶ。上式は

$$W_{t+1}=W_t+X_{t+1},\quad t=0,1,2,\ldots$$

と書き直すことができる。

ここでランダムウォークからブラウン運動が得られることを示す。十分小さな $\Delta_x>0$ について，X_n，$n=1,2,\ldots$ を独立同一の分布

$$P[X_n=\Delta x]=\frac{1}{2}+\frac{\mu}{2\sigma^2}\Delta x,\quad P[X_n=-\Delta x]=\frac{1}{2}-\frac{\mu}{2\sigma^2}\Delta x$$

に従う確率変数の列とし，

$$W_n\begin{cases} 0 & n=0 \\ \sum_{i=1}^{n}X_i & n=1,2,\ldots \end{cases}$$

とすると，W_n はランダムウォークである。また時間間隔 Δt と状態の変位 Δx との関係を

$$\sigma^2\Delta t=(\Delta x)^2$$

となるように定める。

このとき

$$E[X_n]=\frac{\mu\Delta x}{\sigma^2}=\frac{\mu\Delta x}{\sigma^2}\Delta x=\mu\Delta t$$

$$Var[X_n]=(\Delta x)^2-\mu^2(\Delta t)^2=\sigma^2\Delta t-\mu^2(\Delta t)^2$$

が得られる。時間間隔が Δt なので，連続時点 t は離散時点での $n=t/\Delta t$ 時点に対応していることに注意すれば，

$$E[W_n]=\sum_{i=1}^{n}E[X_i]=\mu t$$

$$Var[W_n]=\sum_{i=1}^{n}Var[X_i]=\sigma^2 t-\mu^2 t\Delta t$$

を得る。

X_n の積率母関数は

$$m_X(s)=E[e^{sX_n}]=\left(\frac{1}{2}+\frac{\mu}{2\sigma^2}\Delta x\right)e^{s\Delta x}+\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu}{2\sigma^2}\Delta x\right)e^{-s\Delta x}$$

であるから，$e^{s\Delta x}$ と $e^{-s\Delta x}$ を $s=0$ のまわりでテーラー展開し，$\sigma^2\Delta t=(\Delta x)^2$，$\Delta t=t/n$ に注意すれば，

$$\begin{aligned}m^X(s)&=\left(\frac{1}{2}+\frac{\mu}{2\sigma^2}\Delta x\right)(1+s\Delta x+\frac{s^2}{2}(\Delta x)^2+\frac{s^3}{3!}(\Delta x)^3+\ldots)\\&\quad+\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu}{2\sigma^2}\Delta x\right)(1-s\Delta x+\frac{s^2}{2}(\Delta x)^2-\frac{s^3}{3!}(\Delta x)^3+\ldots)\\&=1+\frac{\mu}{\sigma^2}\Delta x\cdot s\Delta x+\frac{s^2}{2}+\frac{\mu}{\sigma^2}\Delta x\frac{s^3}{3!}\ldots\\&=1+s\Delta t+\frac{\sigma^2 s^2}{2}\Delta t+\frac{\mu\sigma^2 s^3}{3!}(\Delta t)^2+\frac{\sigma^4 s^4}{4!}(\Delta t)^2+\ldots\\&=1+\frac{\mu ts+\sigma^2 ts^2/2}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

一方 $W_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$ における $X_1,X_2,\ldots$ の独立性より，W_n の積率母関数は

$$m_n(s)=\left[1+\frac{\mu ts+\sigma^2 ts^2/2}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^n$$

で与えられる[1)]。よって，

$$\lim_{n\to\infty}m_n(s)=\left[\mu ts+\frac{\sigma^2 ts^2}{2}\right]$$

が成立するので，$W_n\xrightarrow{d}X(t)\sim N(\mu t,\ \sigma^2 t)$ が成り立つ。$\{X(t),\ t\geq 0\}$ における増分の独立性は，ランダムウォークの増分の独立性より明らかである。また後出のように

$$P[|X(t+h)-X(h)|>\delta]=o(h),\ \delta>0$$

1　$f(n)=O(g(n))$ の定義は，すべての $n>N$ について $|f(n)/g(n)|$ となる n とは独立な正の定数 K と正の整数 N が存在する，ということである。

が成立し，$\{X(t),\ t\geq 0\}$ のサンプルパスは連続である。よって (A.1)－(A.3) が満たされるので，$\{X(t),\ t\geq 0\}$ はブラウン運動である。

2．3　ブラウン運動のサンプルパスの性質

$\{X(t)\}$ の実現値 $\{x(t)\}$ を時間の経過とともにグラフに書いてみると，$\{X(t)\}$ は「t の関数」とみなすことができる。この関数をサンプルパスと呼ぶ。このサンプルパスの主な性質は次の通りである。

1. $\{X(t)\}$ は，t の連続関数である。
2. $\{X(t)\}$ は，いたるところで微分不可能な関数である。[2)]
3. $\{X(t)\}$ の一次変動は有界ではない。
4. $\{X(t)\}$ の二次変動は有界である。
5. $\{X(t)\}$ はマルコフ性をもつ。
6. 標準ブラウン運動 $\{B(t)\}$ はマルチンゲール性をもつ。

連続性の証明

任意の $\delta>0$ について

$$P[\,|X(t+h)-X(t)\,|>\delta]=o(h) \tag{3}$$

であることを示せばよい。[3)] ブラウン運動の増分が正規分布に従うことに注意すれば，

$$\begin{aligned}
&P[\,[X(t+h)-X(t)\,|>\delta]\\
&=P[\,|X(t+h)-X(t)\ >\delta]+P[X(t+h)-X(t)<-\delta]\\
&=\int_{\delta}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi h}\,\sigma}\exp\left[-\frac{(x-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}\right]dx+\int_{-\infty}^{-\delta}\frac{1}{\sqrt{2\pi h}\,\sigma}\exp\left[-\frac{(x-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}\right]dx\\
&=\int_{(\delta-\mu h)/\sigma\sqrt{h}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx+\int_{-\infty}^{-(\delta-\mu h)/\sigma\sqrt{h}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx
\end{aligned}$$

となる。ここで $|\,(\delta-\mu h)/\sigma\sqrt{h}\,|>1\,|$ となるように h を十分小さくとれば，

$$\begin{aligned}
\int_{(\delta-\mu h)/\sigma\sqrt{h}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx&\leq\int_{(\delta-\mu h)/\sigma\sqrt{h}}^{\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\\
&=\left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{(\delta-\mu h)/\sigma\sqrt{h}}^{\infty}\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(\delta-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}\right\}
\end{aligned}$$

であり，もう一つの項についても同様の結果が導き出せる。ところで

2　これは有限の時間内に無限回振動していることを示しており，「水面に浮かぶ花粉は絶えまなく不規則に運動している」というブラウンの観察結果を表現していることになる。

3　$o(h)$ は

$$\lim_{h\to\infty}\frac{o(h)}{h}=0$$

を満たす関数で，h に比べて無視できる量であることを表している。この $o(h)$ のスモールオーダー（small order）と呼ばれる。

$$\lim_{h\to\infty}\frac{1}{h}\left[\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(\delta-\mu h)^2}{2\sigma^2 h}\right\}\right]$$

$$=\lim_{h\to\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{h}\cdot\exp\left\{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2 h}+\frac{\mu\delta}{\sigma^2}-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}h\right\}=0$$

であるから結局

$$P[\,|X(t+h)-X(t)|>\delta]=o(h)$$

が成立し，$\{X(t)\}$ のサンプルパスは連続である。///

一次変動，二次変動についての証明

まず二次変動が有界であることを示し，その性質から一次変動が有界ではないことを示す。

いま t を固定し，標準ブラウン運動 $B(t)$ について

$$W_n(t)=\sum_{k=1}2^n\{\Delta_{nk}\}^2,\ \ \Delta_{nk}=B\left(\frac{k}{2^n}t\right)-B\left(\frac{k-1}{2^n}t\right),\ \ k=1,\ldots,2^n$$

を定義する。$W_n(t)$ は時間 $[0,t]$ を 2^n 個の微小区間に分割し，各区間における $\{B(t)\}$ の増分の二乗を加えたものである。

さて $\{B(t)\}$ の時間区間 $[0,t]$ における二次変動 $W_n(t)$ が $n\to\infty$ のとき収束することを示せばよい。標準ブラウン運動過程の性質から，各区間での増分 $\delta_{nk}(k=1,\ldots,2^n)$ は互いに独立で正規分布 $N(0,t/2^n)$ に従っている。よって

$$E(W_n(t))=\sum_{k=1}^{2n}E\{(\Delta_{nk})^2\}=2^n\frac{t}{2^n}=t \tag{4}$$

であり，また

$$E[\{\Delta_{nk}\}^4]=3\left(\frac{t}{2^n}\right)^2$$

であることから，

$$E[\{W_n(t)\}^2]=\sum_{k=1}2^nE[\{\Delta_nk\}^4]+\sum_{i\neq j}E[\{\Delta_{ni}\}^2]E[\{\Delta_{nj}\}^2]$$

$$=2^n\frac{3t^2}{2^{2n}}+(2^{2n}-{}^{2n})\frac{t^2}{2^{2n}}=\frac{2t^2}{2^n}+t^2 \tag{5}$$

となる。(4)式と(5)式より，$n\to\infty$ のとき

$$E[\,|W_n(t)-t|^2]=E[\{W_n(t)\}^2]-\{E[W_n(t)\}^2=\frac{2t^2}{2^n}\to 0$$

となることから $w_n(t)$ は t に平均二乗収束する。故に二次変動は有界である。

次に $\{B(t)$ の時間区間 $[0,t]$ における総変動 $\sum_{k=1}^{2n}|\Delta_{nk}|$ が発散することを示せば，$\{B(t)\}$ が有界変動をもたないことを示せる。ここで

$$\max_{1\le j\le 2^n}\{|\Delta_{nj}|\}\ge|\Delta_{nk}|$$

より，

$$\sum_{k=1}^{2n}|\Delta_{nk}|\geq\sum_{k=1}^{2n}\frac{\{\Delta\}^2}{\max_{1\leq j\leq 2^n}\{|\Delta_{nj}|\}}=\frac{W_n(t)}{\max\limits_{1\leq j\leq 2^n}\{|\Delta_{nj}|\}}$$

である。分母はサンプルパスの連続性から $n\to\infty$ のときゼロに概収束するので，$W_n(t)$ が t に概収束することを示せばよい。

後で示すように標準ブラウン運動はマルチンゲールであるので，飛田（1975, p. 61）の補題を証明なしで用いる。

［**補題**］正整数全体を N^+ とし，$\{Z_n,\ n\in N^+\}$ を確率空間 $(\Omega,\ \boldsymbol{F},\ P)$ 上の確率過程とする。また，$\boldsymbol{F}_n,\ n\in N^+$ を $\boldsymbol{F}_n\subset\boldsymbol{F}$ で，n とともに増加する完全加法族の列とする。今，$\{Z_n,\ n\in N^+\}$ をマルチンゲールとすれば，

$$E(|Z_1|)\leq E(|Z_2|)\leq\ldots\leq E(|Z_n|)\leq\ldots$$

であり，もし

$$\lim_{n\to\infty}E(|Z_n|)=K<\infty$$

ならば確率1で極限値

$$\lim_{n\to\infty}Z_n(\omega)\stackrel{def}{=}Z_\infty(\omega)$$

が存在する。

補題より，$W_n(t)$ は t に概収束することがわかる。故に $B(t)$ の変動は $n\to\infty$ のとき

$$\sum_{k=1}^{2n}|\Delta_{nk}|\geq\frac{W_n(t)}{\max\limits_{1\leq j\leq 2^n}\{|\Delta_{nj}|\}}\ \to\ \infty$$

より，発散するので，$B(t)$ は有界変動をもたない。また

$$X(t)=\mu t+\sigma B(t)$$

として表現されるので，$X(t)$ も有界変動をもたない。///

微分不可能性の証明

ブラウン運動過程は有界変動をもたないので，ブラウン運動のサンプルパスは微分不可能であることがわかる。ここでは別の視点から直観的な説明を加える。$0\leq s\leq t$ について，ブラウン運動の性質より

$$E\left\{\frac{B(t)-B(s)}{t-s}\right\}^2=\frac{1}{t-s}$$

であり，$t\to s$ とすれば

$$\lim_{t\to s}E\left\{\frac{B(t)-B(s)}{t-s}\right\}^2=\infty$$

となる。一方，微分可能を仮定し，導関数を B'_s とすれば

$$\lim_{t\to s}E\left\{\frac{B(t)-B(s)}{t-s}-B'_s\right\}^2=0$$

すなわち

$$\lim_{t\to s}E\left\{\frac{B(t)-B(s)}{t-s}\right\}^2=E\{B'_s\}^2$$

となり矛盾である。よって $B(t)$ は微分不可能であるので，$X(t)$ も微分不可能である。///

マルコフ性の証明

マルコフ性とは「将来の時点 $(S+t)$ における確率的なふるまいは，現時点 s での状態にのみ依存し過去の履歴には無関係である」というものである。ブラウン運動の定義（A. 2）より

$$
\begin{aligned}
&P[X(s+t)\leq y \mid X(s)=x,\ X(u)=x(u),\ 0\leq u<s]\\
&=P[X(s+t)-X(s)\leq y-x \mid X(s)=x,\ X(u)=x(u),\ 0\leq u<s]\\
&=P[X(s+t)-X(s)\leq y-x \mid X(s)=x]
\end{aligned}
$$

が成立するので，ブラウン運動 $\{X(t),\ t\leq 0\}$ はマルコフ過程である。///

標準ブラウン運動のマルチンゲール性の証明

マルチンゲールは公平なゲーム，すなわち「そのゲームに参加している人の次の時点での所持金の期待値は，現時点での所持金に一致している」ということを表している確率過程である。つまり任意の $t\geq s$ に対して

$$E[B(t)\,|\boldsymbol{F}_u,\ 0\leq u\leq s]=B(s)$$

が成り立つことを示せばよい。

$$
\begin{aligned}
&E[B(t)\mid \boldsymbol{F}_u,\ 0\leq u\leq s]\\
&=E[B(t)-B(s)+B(s)\mid \boldsymbol{F}_u,\ 0\leq u\leq s]\\
&=E[B(t)-B(s)\mid \boldsymbol{F}_u]+E[B(s)\mid \boldsymbol{F}_u]\\
&=E[B(t)-B(s)\mid \boldsymbol{F}_s]+E[B(s)\mid \boldsymbol{F}_s]
\end{aligned}
$$

ブラウン運動 $\{B(t),\ t\geq 0\}$ は独立増分をもつから増分 $B(t)-B(s)$ と $\boldsymbol{F}_s$ は独立である。よって

$$E[B(t)-B(s)\mid \boldsymbol{F}_s]=E[B(t)-B(s)]=0$$

また $B(s)$ は $\boldsymbol{F}_s$-可測であるから，

$$E[B(s)\mid \boldsymbol{F}_s]=B(s)$$

となり，標準ブラウン運動はマルチンゲールであることがわかる。///

2．4　拡散過程

定義 $\{X(t),\ t\geq 0\}$ の状態空間 S を実数 R またはその部分空間とする。サンプルパスの連続なマルコフ過程 $\{X(t),\ t\geq 0\}$ が次の極限をもつときに拡散過程とよぶ。

$$
\begin{cases}
\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}E[\varDelta_h X(t)\mid X(t)=x]=\mu(x,t)\\[2ex]
\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}E[\varDelta_h X(t)^2\mid X(t)=x]=\sigma^2(x,t)\neq 0
\end{cases}
\tag{6}
$$

この $\mu(x,t)$ をドリフト関数，$\sigma^2(x,t)$ を拡散関数とよぶ。

このとき $r>2$ に対して

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}E[(\varDelta_h X(t))^r/X(t)=x]=0 \tag{7}$$

となることが知られている。いま $r=3$ で $\{X(t)\}$ がブラウン運動の場合について示す。

$\Delta_h X(t)=[X(t+h)-X(t)]\sim N(\mu h,\ \sigma^2 h)$ であるから，この正規分布の積率母関数を $m(s)$ とすると，$\Delta_h X(t)$ の3次のモーメントは

$$E[(\Delta_h X(t))^3 \mid X(t)=x]=m^{(3)}(0)$$

として計算される。ここで

$$m(s)=\exp\left\{\mu hs+\frac{\sigma^2 h}{2}s^2\right\}$$

より

$$m'(s)=(\mu h+\sigma^2 hs)m(s)$$
$$m''(s)=\sigma^2 h\cdot m(s)+\mu h+\sigma^2 hs)m'(s)$$
$$m^{(3)}(s)=2\sigma^2 h\cdot m'(s)+(\mu h+\sigma^2 hs)m''(s)$$
$$m^{(3)}(0)=2\sigma^2\mu h^2+\mu h^2(\sigma^2+\mu^2 h)$$

であるから，

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}m^{(3)}(0)=0$$

となる。

$g(x)$ を2回微分可能で，$g'(x)\neq 0$ かつ2次の導関数は連続であるとする。このとき拡散過程 $\{X(t)\}$ を $g(x)$ で変換した確率過程 $\{Y(t)=g(X(t))\}$ も拡散過程であることを示す。まず，$g''(x)$ が存在するので，$g'(x)$ は連続関数である。よって $g'(x)\neq 0$ より，$g'(x)>0$ または $g'(x)<0$，つまり $g'(x)$ は狭義単調増加または狭義単調減少関数である。

$X(t)=x$ とする。$h>0$ に対して確率変数 $g(X(t+h))$ を $X(t)=x$ のまわりで各サンプルパス毎にテイラー展開をすると

$$g(X(t+h))=g(x)+\Delta_h X(t)g'(x)+\frac{(\Delta_h X(t))^2}{2}g''(\xi)$$

となる ξ が各サンプルパス毎に $X(t)$ と $X(t+h)$ の間に存在する。つまり ξ は確率1で $X(t)$ と $X(t+h)$ の間にある確率変数である。

$y=Y(t)=g(X(t))=g(x)$ とおくと

$$Y(t+h)-y=\Delta_h X(t)g'(x)+\frac{(\Delta_h X(t))^2}{2}g''(\xi) \qquad (8)$$

となる。$g''(x)$ の連続性と $\{X(t)\}$ のサンプルパスの連続性により

$$P[\lim_{h\to 0}g''(\xi)=g''(x)]=1$$

であるから，(6)と(8)により $\{Y(t)\}$ に関して

$$\mu_Y(y)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}E[\Delta_h Y(t)\mid Y(t)=y]$$
$$=\mu g'(x)+\frac{1}{2}\sigma^2(x)g''(x)$$

を得る。$\{Y(t)\}$ の拡散関数 $\sigma_Y{}^2(y)$ については，(8)式を二乗すると

$$\{Y(t+h)-y\}^2=\{\Delta_h X(t)g'(x)\}^2$$

$$+\{\Delta_h X(t) g'(x)\}\{(\Delta_h X(t))^2 g''(x)\}$$

$$+\frac{1}{4}\{\Delta_h X(t)\}^4\{g''(x)\}^2$$

となるが，(7)式より 3 次以上の $\{\Delta_h X(t)\}^r$ の期待値は $o(h)$ であるから，

$$\sigma^2{}_Y(y)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}E[\{\Delta_h X(t)\}^2 \mid Y(t)=y]$$
$$=\sigma^2(x)\{g'(x)\}^2$$

となる。また，条件(3)は，$\{X(t)\}$ が拡散過程であることと $g(x)$ の連続性から明らかに成立する。よって，$\{Y(t)\}$ はドリフト関数(9)と拡散関数(10)をもつ拡散過程である。

2．5　幾何ブラウン運動過程

定義 $\{X(t),\ t\geq 0\}$ をブラウン運動過程

$$X(t)=\mu t+\sigma B(t)$$

とする。ここで $\{B(t),\ t\geq 0\}$ は標準ブラウン運動過程で，μ と σ は定数である。このとき

$$Y(t)=Y(0)e^{X(t)},\quad t\geq 0$$

により定義される $\{Y(t),\ t\geq 0\}$ を幾何ブラウン運動過程と呼ぶ。

幾何ブラウン運動 $\{Y(t),\ t\geq 0\}$ は拡散過程であることを示し，$\{Y(t),\ t\geq 0\}$ のドリフト関数 $\mu_Y(y)$ と拡散関数 $\sigma^2{}_Y(y)$ を求める。ここでは前節の結果をそのまま使う。

$g(x)=e^x$ とおく。$g'(x)=g''(x)=e^x$ であり，ブラウン運動 $X(t),\ t\geq 0\}$ のドリフト関数と拡散関数はそれぞれ $\mu(x)=\mu$，$\sigma^2(x)=\sigma^2$ であるから前節の結果より，

$$\mu_Y(y)=\mu e^x+\frac{\sigma^2}{2}e^x,\quad \sigma^2{}_Y(y)=\sigma^2 e^{2x}$$

となる。$y=g(x)=e^x$ とし，$y>0$ に注意すれば，$\{Y(t),\ t\geq 0\}$ はドリフト関数と拡散関数がそれぞれ

$$\mu_Y(y)=\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)y,\quad \sigma^2{}_Y(y)=\sigma^2 y^2,\quad y>0$$

で与えられる拡散過程である。

2．6　ブラウン橋過程

定義 閉区間 $[0,T]$ の両端において $B(0)=a$，$B(T)=b$ であって，途中ではブラウン運動に従う確率過程をブラウン橋過程とよぶ。

$\{B(0)=a,\ B(T)=b\}$ という条件の下での $\{B(t),\ 0\leq t\leq T\}$ の確率密度関数を求める。

$f(x,y)$ を $\{B(0)=a\}$ という条件の下での確率ベクトル $(B(t),\ B(T))$ の同時密度関数とする。ブラウン運動 $\{B(t)\}$ のマルコフ性から

$$P[B(t)\leq x,\ B(T)\leq y \mid B(0)=a]$$
$$=\int_{-\infty}^{x}P[B(T)\leq y \mid B(T)=u]\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left\{-\frac{(u-a)^2}{2t}\right\}du$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\exp\left\{\frac{(v-u)^2}{2(T-t)}\right\}dv\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left\{-\frac{(u-a)^2}{2t}\right\}du$$

となる。ここで使っているのは，時点0で a にいた粒子の t 時点後の位置が正規分布 $N(a,t)$ に従うという性質である。上式を x と y で偏微分して

$$f_{xy}(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}P[B(t)\leq x,\ B(T)\leq y\mid B(0)=a]$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\exp\left\{-\frac{(v-u)^2}{2(T-t)}\right\}dv\right]$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left\{-\frac{(u-a)^2}{2t}\right\}du$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\exp\left\{-\frac{(y-u)^2}{2(T-t)}\right\}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left\{-\frac{(u-a)^2}{2t}\right\}du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\exp\left\{-\frac{(y-u)^2}{2(\mathrm{T}-t)}\right\}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2t}\right\}$$

を得る。結局

$$f_{xy}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{t(T-t)}}\exp\left[-\frac{1}{2t(T-t)/T}\left\{x-\frac{a(T-t)+yt}{T}\right\}^2-\frac{(y-a)^2}{2T}\right]$$

であり，y の周辺密度関数は

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{XY}(x,y)\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\exp\left\{-\frac{(y-a)^2}{2T}\right\}$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi t(T-t)/T}}\exp\left\{-\frac{(x-(a(T-t)+yt)/T)^2}{2t(T-t)/T}\right\}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\exp\left\{-\frac{(y-a)^2}{2T}\right\}$$

である。$\{B(0)=a,\ B(T)=b\}$ という条件の下での $B(t),\ 0\leq t\leq T\}$ の確率密度関数 $f_{X/Y}(x/b)$ は

$$f_{X/Y}(x\mid b)=\frac{f_{xy}(x,b)}{f_Y(b)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi t(T-t)/T}}\exp\left\{-\frac{(x-(a(T-t)+yt)/T)^2}{2t(T-t)/T}\right\}$$

よって $\{B(0)=a,\ B(T)=b\}$ という条件の下で $\{B(t),\ 0\leq t\leq T\}$ は正規分布

$$N\left(\frac{T-t}{T}a+\frac{t}{T}b,\ \frac{t(T-t)}{T}\right)$$

に従う。

この結果を用いると，確率過程

$$Z(t)=\frac{T-t}{T}a+\frac{t}{T}b+\left(B(t)-\frac{t}{T}B(T)\right)$$

は$X(0)=a$から$X(T)=b$へのブラウン橋過程である。

3　確率微分方程式

この章では線形確率微分方程式

$$dX(t)=\mu(X(t),t)\,dt+\sigma(X(t),t)\,dB(t),\ t\geq 0;\ X(0)=x \tag{9}$$

を考える。ここで$\mu(X(t),t)$，$\sigma(X(t),t)$は確定的な関数であり，$\{B(t),\ t\geq 0)$は標準ブラウン運動である。問題になるのは$\Delta B(t)/\Delta t$の極限であるが，前述したように$\{B(t)\}$が有界変動をもたないので通常の意味ではこの極限は存在しない。そこで形式的な極限としての上式に数学的な意味を持たせるために，確率積分と確率微分の概念の導入が必要となる。

3．1　確率積分

この節では伊藤の意味の確率積分とストラトノビッチの意味の確率積分の
比較を行なう。

$\{\phi(t)\}$を連続なサンプルパスをもつ確率過程とし，確率積分

$$I(t)=\int_0^t \phi(\tau)\,dB(\tau) \tag{10}$$

の計算を考える。いま，時間$[0,t]$をn分割し，その分割点を

$$0=t_0<t_1<\ldots<t_n=t$$

とする。$\{B(t)\}$は有界変動ではないが，通常のスティルチェス積分と同様に(10)式を

$$J_n=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\phi(t_i)+\phi(t_{i+1})}{2}\{B(t_{i+1})-B(t_i)\} \tag{11}$$

$$I_n=\sum_{i=0}^{n-1}\phi(t_i)\{B(t_{i+1})-B(t_i)\} \tag{12}$$

という2つの方法で近似してみる。通常のスティルチェス積分では，$n\to\infty$のときに

$$\max_{0\leq i\leq n-1}|t_{i+1}-t_i|\to 0$$

となるような任意の分割に対して，$\{\phi(t)\}$の近似の方法に依存せずに同一の値に収束するとき積分が存在するという。

$\{B(t)\}$は有界変動ではないので，確率積分では$\{\phi(t)\}$の近似の方法によって収束値が異なる場合がある。これを見るために，$\{\phi(t)\}$として$\{B(t)\}$を考える。このとき(11)式は$B(0)=0$を仮定すると

$$J_n=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\{B(t_{i+1})^2-B(t_i)^2-B(t_i)^2\}\,\frac{1}{2}B(t)^2$$

となる。よって $\{B(t)\}$ の各区間 $[t_i,t_{i+1}]$ での近似値として平均の値を選んだときの極限は

$$\lim_{n\to\infty} J_n = B(\tau)\,dB(\tau) = \frac{1}{2}B(t)^2$$

となり，これは通常のスティルチェス積分の結果と一致する。

次に I_n の極限を評価するために，

$$J_n - I_n = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\{B(t_{i+1})^2 - B(t_i)^2\}$$

という関係式を利用する。上式の右辺は，微小区間における増分の二乗の和であるから，1．3節の結果より，$n\to\infty$ のときに $t/2$ に概収束かつ平均二乗収束する。よって

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{1}{2}B(t)^2 - \frac{t}{2}$$

となり，異なる結果が得られた。

このように確率積分は $\{\psi(t)\}$ をどのように近似するかにより結果が異なる。I_n を⑿式で定義しその極限が区間の分割の仕方に依存しないとき，その極限 $I(t)$ を伊藤の意味の確率積分という。⑾式による積分をストラトノビッチの意味の確率積分という。後出の確率微分方程式との整合性をとる意味で，⑿式のように $\{\psi(t)\}$ を近似すると都合のよいことが多い。

3．2　伊藤の変換公式

⑼式を積分表現で書くと

$$X(t) - X(0) = \int_0^t \mu(X(s),s)\,ds + \int_0^t \sigma((X(s),s)\,dB(s) \tag{13}$$

となるが，⒀式の右辺第2項は確率積分であるから，⑼式の確率微分方程式の解は，サンプルパス毎に考えた通常の微分方程式の解とは異なっていることが予想される。この節では，確率微分方程式を解く際にきわめて有用な伊藤の変換公式について説明する。

$\{X(t)\}$ を⑼式の解とし，$Y(t) = f(X(t),t)$ により変換された確率過程 $\{Y(t)\}$ を考える。ここで $f(x,t)$ は十分なめらかな関数とし，簡略化のため x による一階の偏微分を $f_x(x,t)$，x と t による偏微分を $f_{xt}(x,t)$ という具合に書くことにする。まず2変数関数のテイラー展開の公式から，

$$dY = f_x(X,t)\,dX + f_t(X,t)\,dt + \frac{f_{xx}(X,t)}{2}\{dX\}^2 + f_{xt}(X,t)\,dX dt + o(dt) \tag{14}$$

を得る。ところで，1．3節で定義した $W_n(t)$ が $n\to\infty$ のときに t に収束することを形式的に積分の記号で書くと，積分の定義から，

$$\int_0^t \{dB(\tau)\}^2 = t = \int_0^t d\tau$$

となる。これは十分小さな dt に対しては，

$$\{dB(t)\}^2 = dt + o(dt) \tag{15}$$

と考えてよいことを意味している。よって(9)式より，

$$\{dX(t)\}^2=\sigma^2(X,t)\,dt+o(h) \tag{16}$$

を得る。また $\{B(t)\}$ のサンプルパスの連続性により

$$\lim_{dt\to 0}\frac{dB(t)\,dt}{dt}=\lim_{dt\to 0}\{B(dt)-B(0)\}=0$$

であるから，$dBdt=o(dt)$ であり結局

$$dXdt=o(dt)+\sigma(X,t)\,dBdt=o(dt)$$

である。以上の結果を使って(14)式を整理すると

$$\begin{aligned} dY=&\left\{f_x(X,t)\mu(x<t)+f_t(X,t)+\frac{f_{xx}(X,t)}{2}\sigma^2(X,t)\right\}dt \\ &+f_x(X,t)\sigma(X,tt)\,dB \end{aligned} \tag{17}$$

となる。(17)式を伊藤の変換公式という。

3．3　ギルサノフの定理

ギルサノフの定理は与えられたIto過程を任意の移動係数をもつIto過程へ書き直すような確率測度の調整法であると考えられる。

定理 $\{X(t),\ t\geq 0\}$ を確率測度 $\boldsymbol{P}$ の下でのブラウン運動過程とする。二乗可積分な関数[4] $f(\cdot)$ に対して新たに確率過程

$$Y(t)=\exp\left\{\int_0^t f(s)\,dX(t)-\frac{1}{2}\int_0^t\{f(s)\}^2 ds\right\},\quad t\in[0,T]$$

を定義する。$E[Y(T)]=1$ と仮定し，新たな確率測度 $\tilde{P}$ を

$$d\tilde{P}=Y(\tau)\,dP$$

によって定義する。このとき，

$$\tilde{X}(t)\overset{def}{=}X(t)-\int_0^t f(s)\,ds$$

は確率測度 $\tilde{P}$ の下で，ブラウン運動過程になる。

4　利子率の期間構造

割引債とは政府，各種公共団体，企業などが資金調達のために発行する一種の証券である。発行者が定めた期日（満期日）に発行時に約束した金額を投資家に返還するが，発行時点で投資家は満期日に返還される金額よりも少ない投資額でこの証券を獲得できるため割引債と呼ばれる。

4　関数 $f(\cdot)$ が二乗可積分であるとは，この場合

$$\int_0^T\{f(s)\}^2 ds<\infty$$

であることを意味する。

このような割引債も市場で取り引きされ，利子率，満期日までの期間の長さによってその価値が変動する。

さて，時刻 T で満期となる割引債の時刻 t における価格を $P(t,T)$ とする。ただし，この債券1単位の満期日における価値 $P(T,T)$ は

$$P(T,T)=1$$

であると仮定する。時点 t から T までの平均の利子率は最終利回りまたはイールドとよばれ，$Y(t,T)$ と書く。よってこの債券の価格を

$$P(t,T)=\mathrm{e}^{Y(t,T)(T-t)},\quad t\leq T$$

と表すことができる。

時点 t における瞬間的利子率を瞬間的スポットレートと呼び，$r(t)$ と書く。また将来の時点 T における瞬間的利子率を瞬間的フォワードレートと呼び，$f(t,T)$ と書く。これは

$$f(t,T)=-\frac{\partial}{\partial T}\log P(t,T),\quad t\leq T$$

と表すことができる。またこの式より

$$P(t,T)=\exp\left\{-\int_t^T f(t,s)\,ds\right\},\quad t\leq T$$

が成立する。

4．1　スポットレートモデル

スポットレートの実際の動きを見てみると，平均的なレベル $m>0$ が存在して，このレベルの周辺をレベル m へ回帰するように変動している。このようなスポットレートの変動の様子を確率微分方程式で表現するためには

$$dr(t)=c(m-r(t))\,dt+\sigma(r(t),t)\,dB(t),\quad m,c>0,\quad t\leq 0 \tag{18}$$

と定式化するのが妥当である。このとき $r(t)>m$ であれば瞬間的な変位の平均は負であるから，平均的には $r(t)$ は減少する方向へ向かうし，逆に $r(t)<m$ であれば瞬間的な変位の平均は正であるから，平均的には $r(t)$ は増加する方向へ向かうであろう。c は $r(t)$ が平均のレベル m へ戻ろうとする力の強さを表している。もちろん c や m は $r(t)$ の状態と時点 t に依存していてもよい。以下では代表的なスポットレートモデルとして，Vasicek モデルと CIR モデルを紹介する。

Vasicek モデル

Vasicek（1977）は瞬間的スポットレートを次の確率微分方程式で定式化した。

$$dr(t)=c(m-r(t))\,dt+\sigma dB(t),\quad t\geq 0\,;\,r(0)=r \tag{19}$$

ここで σ はスポットレート過程のボラティリティを表している。ボラティリティが定数であるから，この確率微分方程式に従うスポットレート過程は正の確率で負の値を取り得る。

CIR（1985）モデル

⒇式において $\sigma(r(t),t)=\sigma\sqrt{r(t)}$ とおいたモデル

$$dr(t)=c(m-r(t))dt+\sigma\sqrt{r(t)}\,dB(t),\quad t\geq 0\,;\,r(0)=r \tag{20}$$

が有名なCIR（Cox-Ingersoll-Ross）モデルである。このモデルでは $r(t)$ が負の値を取ることはない。なぜならば，$r(t)$ が0に近づくとそのボラティリティは0に近づき，一方瞬間的な変位の平均値は正なので，このときほとんど確実に $r(t)$ は増加の方向に向かうからである。

包含モデル

Brenner, Harjes, and Kroner（1996）や Chan, Karolyi, Longstaff, and Sanders（1992）など，Vasicek モデルやCIRモデル等を包含したモデルを使った実証分析がいくつかある。彼等の研究では，包含モデルは

$$dr(t)=(\alpha+\beta r(t))dt+\phi[r(t)]^{\gamma}dB(t) \tag{21}$$

と定式化されている。ただし，β,ϕ,γ はパラメーターである。これはスポットレートのモデルとして提案された様々なモデルを包含している（表1）。上の式を Euler-Maruyama 近似を使って離散化すると

$$r(t+h)-r(t)=(\alpha+\beta r(t))h+\phi[r(t)]^{\gamma}\sqrt{h}\,\varepsilon_{t+h},\quad t=0,h,\ldots,(N-1)h \tag{22}$$

となる。ただし $\varepsilon_t\sim iidN(0,1)$ である。このようなモデルを使えば，データに対してどのモデルが当てはまりが良いのか実証分析できる。

表1　包含モデルとスポットレートモデルの関係

$$dr=(\alpha+\beta r)dt+\phi r^{\gamma}dW$$

Model	α	β	ϕ	γ
i. Merton（1973）		0		0
ii. Vasicek（1977）				0
iii. CIR（1985）Square Root				1/2
iv. Dothan（1978）	0	0		1
v. Geometric Brownian Motion	0			1
vi. Brennan and Schwartz（1980）				1
vii. CIR（1980）Variable-Rate	0	0		3/2
viii. Constant Elasticity of Variance process: Cox（1975）and Cox and Ross（1976）	0			

4．2　フォワードレートモデル

HJMモデル

Heath, Jarrow, and Morton（1992）（以下HJM）によって提唱されたモデルは，伝統的な瞬間的スポットレートモデルとは異なり，瞬間的フォワードレートをモデル化するものである。HJMモデルでは，満期 T の時点 t における瞬間的フォワードレート $f(t,T)$ がある確率過程に従うとし，次のような Ito 過程で表現される。

$$df(t,T)=\alpha(t,T,\cdot)\,dt+\sum_{i=1}^{n}\sigma_i(t,T,f(t,T))\,dB_i(t) \tag{23}$$

$\{B_i(t)\}$ は確率空間 $(\Omega, \boldsymbol{F}, P)$ で定義された独立な標準ブラウン運動，α はドリフト関数，σ_i はボラティリティ関数を表す。一般にドリフト関数は $t\leq s\leq T$ を満たすすべての満期 s についてのフォワードレートに依存するので，簡単のためこれらを省略して「·」で表している。この時，HJM はこのモデルに無裁定条件をリスク中立測度の下で課すと次のような制約が加わることを示した。

$$\alpha(t,T,\cdot)=-\sigma_i(t,T,f(t,T))\left[\phi_i(t)-\int_t^T\sigma_i(t,u,f(t,u))\,du\right] \tag{24}$$

ただし $\phi_i(t)$ はリスクの市場価格である。

実証用の定式化

HJM モデルでは，無裁定を理論的に保証するための条件がモデルに複雑な制約を与えるため，HJM モデルを出発点にして実証モデルを構築するのは一般に易しくない。Kamizono and Kariya（1996）（以下 K-K）は，階段関数を使って HJM モデルのボラティリティ項を特定化して，簡単に推定を行なえるようにした。以下では K-K の方法を概説し，浅井・高橋・斯波（1998）による拡張に触れる。

K-K は無裁定条件を実証上課すために以下のような定式化を採用した。

まずリスクの市場価格 $\phi_i(t:\theta)=\phi_i$ 一定の未知パラメータ $i=0,\dots,n$ (25)

またデータとして期間 $[S_j, S_{j+1}]$ の金利を現在時点 t で予約した時のフォワードレート z_{jt}，$j=1,\dots,n$ と，満期 S_0 のスポットレート z_{0t} が観測可能であると仮定した。その上で，ボラティリティ関数について Amin and Morton（1994）のような恣意的な定式化をせずに，満期 T についての階段関数 $I(T)$ を使って定式化した。

$$\sigma_i(t,T:\theta)=\xi_{i0}(t)\,I_{[t,S_1)}(T)+\sum_{j=2}^{n+1}\xi_{ij-1}(t)\,I_{[S_{j-1},S_j)}(T) \tag{26}$$

$$i=0,\dots,n$$

ただし，$\xi_{ij}(t)$ は，微小時間 h の間の i 番目のファクターの $f(t,T)$，$T\varepsilon[S_j,S_{j+1}]$ への変動の寄与分を表す。これでボラティリティは一種の時変パラメータまたは確率係数モデル的に定式化されたことになる。HJM モデルにこれらの定式化を入れて，観察されるフォワードレート z_{jt} を使って離散化すると次のようになる。

$$\mathrm{Z}_{t+h}-\mathrm{Z}_t=\mu_t h+\sqrt{\mathrm{h}}\,\textstyle\sum_t'\varepsilon_{t+h},\quad t=0,\mathrm{h},\cdots,(\mathrm{N}-1)\mathrm{h}$$

ただし

$$z_t=\begin{bmatrix} z_{0t}\\ \vdots \\ z_{nt}\end{bmatrix},\quad \mu_t=\begin{bmatrix}\mu_{0t}\\ \vdots \\ \mu_{nt}\end{bmatrix},\quad \textstyle\sum_t=\begin{bmatrix}\xi_{00}(t) & \cdots & \xi_{0n}(t)\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n0}(t) & \cdots & \xi_{nn}(t)\end{bmatrix},$$

$$\varepsilon_t=\begin{bmatrix}\varepsilon_{0t}\\ \vdots \\ \varepsilon_{nt}\end{bmatrix}\sim N_{n+1}(0,I_{n+1}),$$

$$\mu_j(t)=\sigma_t'(\Sigma_t a_{jt}-\Phi)\qquad j=0,\ldots,n,$$

$$\sigma_t=\begin{bmatrix}\xi_{0j}(t)\\ \vdots \\ \xi_{nj}(t)\end{bmatrix},\quad \Phi=\begin{bmatrix}\phi_0\\ \vdots \\ \phi_n\end{bmatrix},$$

$$a_{0t}=\begin{bmatrix}\frac{S_0-t}{2}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix},\quad a_{jt}=\begin{bmatrix}S_1-t\\ S_2-S_1\\ \vdots\\ S_j-S_{j-1}\\ \frac{S_{j+1}-S_j}{2}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix},\quad j=1,\ldots,n,$$

$$z_{jt}=\frac{1}{S_{j+1}-S_j}\int_{S_j}^{S_{j+1}}f(t,T)\,dT\qquad j=0,\ldots,n$$

フォワードレート z_{jt} は瞬間的フォワードレート $f(t,T)$ の積分として表されており，初めて観測可能な変数を使ったオペレーショナルなモデルに変換されたことになる。推定すべきパラメータのベクトルを θ とすると，データ z_t が与えられたときの対数尤度関数は，

$$\ln L(\theta\mid z_t)=-\frac{N}{2}\ln 2\pi-\frac{1}{2}\ln|h\Sigma_t'\Sigma_t|$$
$$-\frac{1}{2}(z_{t+h}-z_t-h\mu_t)'(h\Sigma_t'\Sigma_t)^{-1}(z_{t+h}-z_t-h\mu_t)$$

となる。ただし N は標本の大きさである。この対数尤度関数 $\ln L$ をパラメータベクトル θ について最大化して，最尤推定量 $\hat{\theta}$ が得られる。

K-K は，東京金融先物取引所に上場されているユーロ円金利先物 3 カ月ものデータについて実証分析を行なっている。彼らは実証分析に際し，Σ_t を以下のように特定化した。

$$\Sigma_t=PJ_t \tag{28}$$

$$P=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} & \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho_2}} & \frac{\rho^2}{\sqrt{1-\rho^2}} & \cdots & \frac{\rho^n}{\sqrt{1-\rho^2}}\\ & 1 & \rho & \cdots & \rho^{n-1}\\ & & 1 & \cdots & \rho^{n-2}\\ & O & & \ddots & \vdots\\ & & & & 1\end{bmatrix}$$

$$J_t=\mathrm{diag}\{\lambda_0 z_{0t},\ldots,\lambda_n z_{nt}\}$$

ただし diag{·} は対角行列を示し，ρ は限月が隣合う資産の先物金利の相関係数を示す。$\lambda_j,\ j=0,\ldots,n$ は各資産の瞬間的フォワードレートのボラティリティの大きさを表す。

浅井・高橋・斯波（1998）では以下の 2 点について K-K の定式化を若干拡張している。

1．K-K の定式結果を見ると，スポットレートの変動が推定結果に多大な影響を及ぼしているので，この影響を取り除く。すなわち，i や j が 0（ゼロ）の部分を除外する。

2．限月が隣合う資産の同時点間の相関係数が常に等しいという

仮定（上の（28）式）を緩め，その相関係数が個々に異なることを許す。

浅井・高橋・斯波（1998）の実証分析では 3 資産モデルを使い（$n=3$），Σ_t, P, J_t を

$$\Sigma_t = PJ_t \tag{29}$$

$$P=\begin{bmatrix} 1 & \rho_1{}^2 & \rho_{31} \\ 0 & \sqrt{1-\rho_{12}^2} & \rho_A \\ 0 & 0 & \sqrt{1-\rho_{31}^2-\rho_A^2} \end{bmatrix}$$

$$J_t=\mathrm{diag}\{\lambda_1 z_{1t},\ldots,\lambda_n z_{nt}\}$$

とおいている。ただし，$\rho_A=(\rho_{23}-\rho_{12}\rho_{31})/\sqrt{1-\rho_{12}^2}$ である。このとき

$$P'P=\begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{31} \\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{23} & 1 \end{bmatrix} \tag{30}$$

となり，限月が隣合う資産の同時点間の相関係数が個々に異なっている。

5　結びに代えて

本稿では，ブラウン運動や確率微分方程式を踏まえつつ，利子率の期間構造のモデルを紹介した。利子率の期間構造のモデルの紹介では，特に実証分析へ応用を目的として解説した。最近では Euler-Maruyama 近似ではなく，Shoji and Ozaki（1998）の局所線形化法による近似方法も提案されているが，本稿の扱う範囲を超えるので紹介しなかった。本稿が，実証分析を目的とした研究者の一助となれば幸いである。

参考文献

[1] Amin, K. I. and A. J. Morton (1994),"Implied Volatility Functions in Arbitrage-free Term Structure Models", *Journal of Financial Economics*, 35, 141-180.

[2] Brennan, M. J. and E. S. Schwartz (1980),"Analyzing Convertible Bonds", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 15, 907-929.

[3] Brenner, R. J., R. H. Harjes, and K. Kroner (1996),"Another Look at Models of the Short-Term Interst Rate", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 31, 85-107.

[4] Campbell, J. Y. and P. Perron (1991), "Pitfalls and opportunities : What macroeconomists should know about unit roots," in O. J. Blanchard and S. Fischer, eds., *NBER Macroeconomics Annual 1991*, MIT Press.

[5] Chan, K. C., G. A. Karolyi, F. A. Longstaff, and A. B. Sanders (1992), "An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate", *Journal of Finance*, 47, 1209-1227.

[6] Cox, J. C. (1975), "Notes on Option Pricing I : Constant Elasticity of Variance Difussions", Working paper, Stanford University.

[7] Cox, J. C. and S. A. Ross (1976), "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes", *Journal of Financial Economics*, 3, 145-166.

[8] Cox, J. C., J. Ingersoll, and S. A. Ross (1980), "An Analysis of Variable Rate Loan Contracts", *Journal of Finance*, 35, 389-403.

[9] Cox, J. C., J. Ingersoll, and S. A. Ross (1985), "A Theory of the Term Structure of interest rstes", *Econometrica*, 53, 385-407.

[10] Dothan, U. L. (1978), "On the Term Structure of Interest Rates", *Journal of Financial Economics*, 16, 321-343.

[11] Heath, D., R. A. Jarrow, and A. J. Morton (1992), "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates : A New Methodology for Contingent Claims Valuation", *Econometrica*, 60(1), 77-105.

[12] Kamizono, K. and T. Kariya (1996) "An Implementation of the HJM Model with Application to Japanese Interest Futures", *Financial Engineering and the Japanese Markets*, 3, 151-170.

[13] Merton, R. C. (1973), "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, 141-183.

[14] Shoji, I. and T. Ozaki (1998), "A Statistical Method of Estimation and Simulation for Systems of Stochastic Differential Equations", 85, 240-243.

[15] Vasicek, O. A. (1977), "An Equilibrium Characterization of the Term Structure," *Journal of Financial Economics*, 5, 177-188.

[16] 浅井学・高橋利幸・斯波恒正（1998),「先物金利モデルの予測力：HJM モデルを中心として」, 森棟公夫・刈屋武昭編『リスク管理と金融・証券投資戦略』, 東洋経済新報社.

[17] 飛田武幸（1975),『ブラウン運動』, 岩波書店.