VAR モデルにおける共和分，ECM，因果関係の分析

浅井　学

1．はじめに

本稿の目的は経済時系列データの因果関係の分析方法をサーベイすることにある。経済学においては，経済理論から変数間の具体的な因果関係が導かれない場合がある。また理論から導かれた因果関係が正しいものか検証を迫られる場合がある。このような場合，データそのものに語らしめる方法として，時系列分析では Granger の因果性等の概念がある。さて80年代後半から多くの経済時系列データは単位根を含んでいることが明らかになった。このため定常時系列データに適用できた時系列分析の手法が使えなくなってしまった。本稿では，まず定常な多変量自己回帰 Vector Auto-Regression（VAR）モデルにおける因果関係の分析法を紹介し（第2節～第4節），第5節と第6節では非定常なケースについて扱う。特に変数間に共和分関係があるときの VAR の多変量誤差修正モデル Vector Error Correction Model（VECM）表現と，Johansen（1988）の共和分検定等を踏まえて因果関係の分析法を紹介する。第7節では実際のデータを使った例を紹介する。

2．VAR モデル：識別と推定，予測

m 個の確率変数からなるベクトル $y_t=(y_{1t},\ y_{2t},\ \cdots,\ y_{mt})'\sim m\times 1$ が p 次の VAR モデルで表わされるとする。すなわち

$$y_t=\Phi_1 y_{t-1}+\Phi_2 y_{t-2}+\cdots+\Phi_p y_{t-p}+u_t, \tag{1}$$

ただし $\Phi_k=\{\phi_{ij,k}\}\sim m\times m\,(k=1,\ \cdots,\ p)$ は係数パラメーターの m 次元正方行列である。また u_t は $u_t=(u_{1t},\ \cdots,\ u_{mt})'$ なる m 次元の撹乱項のベクトルであり，ホワイト・ノイズ・ベクトルであると仮定する。すなわち u_t は以下の性質を持つ。

$$E(u_t)=0 \quad \text{for all } t \tag{2}$$

$$Var(u_t)=E(u_t u_t')=\Sigma=\{\sigma_{ij}\} \quad \text{for all } t \tag{3}$$

$$E(u_t u_s')=0 \quad \text{for } t\neq s \tag{4}$$

第2節から第4節では定数項のないVARを扱うが，これらの結果は定数項のあるモデルに簡単に拡張できる。

真のラグ次数 p が既知の時，TSPでVAR(p)を推定するには

```
var(nlags=p) y1 … ym;
```

とする。TSPでは誤差項に正規性を仮定し最尤推定しているが，1本ずつ最小2乗推定しても係数行列の推定値は（解析的には）同じである。

ラグ次数 p の選択方法として，1）Sims（1980）の尤度比検定による選択方法，2）AIC等の情報量基準による選択方法がある。尤度比検定により次数 p を選択するには，最大ラグ次数 p_{max} から逐次 F 検定を行なえばよい。

H_0：ラグ次数が p_0

H_1：ラグ次数が p_0+p^*　$(p^*>0)$

とすると，変数が m ならば帰無仮説の下で，自由度修正を施した尤度比検定統計量

$$LR=(T-m(p_0+p^*))[L(H_1)-L(H_0)]$$

は $\chi^2(m^2p^*)$ に従う。ただし $L(H_i)$ は仮説 $H_i(i=0,\ 1)$ の下での最大対数尤度である。

VAR(p)による h 期先の予測値は

$$\hat{y}_{t+h}=\sum_{k=h}^{p}\Phi_k y_{t-k+h}+\sum_{k=1}^{h-1}\Phi_k\hat{y}_{t-k+h}\quad \text{if } h<p \tag{5}$$

で与えられる。

VARモデルによる因果関係の分析は大きく分けて2つに分れる。

1．Granger（1969）の意味での因果関係の分析
2．Sims（1980）によるinovation accounting
   - インパルス応答関数
   - 予測誤差分散分解

後で紹介するように，両者は互いに強い関連はあるが異なった概念である。

VARにおける因果性分析では，変数が1つ増えただけで（減っただけで），それまでとは全く異なる結果になる場合がある。従って分析目的，経済理論に照らして適切な変数を選択しておく必要がある。

3．Grangerの因果性概念

Granger（1969）が提唱した概念であり，y_i の最適予測を行なうときに，過去の y_j の情報がその予測平均2乗誤差の減少に貢献しないとき，Grangerの意味で y_j から y_i への因果関係がないと定義され，$y_j \overset{G}{\not\longrightarrow} y_i$ と表わす。また予測平均2乗誤差の減少に貢献するとき，Grangerの意味で y_j から y_i への因果関係があると定義され，$y_j \xrightarrow{G} y_i$ と表わす。

VARモデルにおけるGrangerの因果関係について説明するために，(1)式のモデルの第 i 方程

式に注目する。

$$y_{it}=\sum_{k=1}^{p}\phi_{i1,k}y_{1,t-k}+\cdots+\sum_{k=1}^{p}\phi_{im,k}y_{m,t-k}+u_{it}+\cdots+\sum_{k=1}^{p}\phi_{im,k}y_{m,t-k}+u_{it} \tag{6}$$

このときGrangerの因果性について次のように必要十分条件が示される。

$$y_j \text{ does not Granger cause } y_i\ (y_j \overset{G}{\not\longrightarrow} y_i) \Longleftrightarrow \phi_{ij,1}=\cdots=\phi_{ij,p}=0$$

$$y_j \text{ Granger cause } y_i\ (y_j \overset{G}{\longrightarrow} y_i) \Longleftrightarrow \phi_{ij,k}\neq 0 \text{ for any } k$$

すなわち当該変数の方程式のある変数がすべて説明力をもたないとき，Grangerの意味でその変数から当該方程式の被説明変数への因果関係がないという。

4．Inovation accounting

Grangerの因果関係は定性的概念であり，どの程度の強さで影響しているかという定量的概念は扱っていない。またGrangerの因果関係の概念は，基本的には2つの変数（群）の関係に関するもので，3変量以上の関係を同時に捉えることはできない。そこでこれらの限界を克服するものとして，Sims（1980）等はVARモデルのVMA（∞）表現による分析を提唱した。これがインパルス応答関数による分析と予測誤差分散分解による分析である。これらはInovation accountingとよばれる。

まず準備としてVARモデルのVMA（∞）表現，システムの誤差分散行列の対角化について説明し，次にインパルス応答関数による分析と予測誤差分散分解による分析を紹介する。

4．1　VARモデルのVMA（∞）表現

(1)式のVAR(p)モデルをラグ・オペレーターLを使って$\Phi(L)y_t=u_t$と書くことにする。ただし$\Phi(L)=I_m-\sum_{k-1}^{p}\Phi_k L^k$である。$\Phi(L)$が定常性の条件を満たすならば，このVAR$(p)$はVMA(∞)，$y_t=u_t-\sum_{k=1}^{\infty}\Theta_k u_{t-k}$または$y_t=\Theta(L)u_t$に変換できる。ただし$\Theta(L)=I_m-\sum_{k=1}^{\infty}\Theta_k L^k$である。このときAR係数$\Phi_k$とMA係数$\Theta_k$は次のような関係にある。

$$y_t=\Phi(L)^{-1}u_t=\Theta(L)u_t$$

従って$\Phi(L)^{-1}=\Theta(L)$または$I_m=\Phi(L)\Theta(L)$である。つまり

$$\begin{aligned}\Phi(L)\Theta(L)&=(I_m-\sum_{k=1}^{p}\Phi_k L^k)(I_m-\sum_{k=1}^{\infty}\Theta_k L^k)\\&=I_m-\sum_{h=1}^{p}(\Phi_h+\Theta_h)-\sum_{\substack{k=1\\h>p}}^{p}(\Phi_k\Theta_{h-k})L^h-\sum_{h=p+1}^{\infty}(\Theta_h-\sum_{k=1}^{p}\Phi_k\Theta_{h-k})L^h\end{aligned}$$

であり，これがI_mに等しくなければならないが，そのためには$L^h(h\geq 1)$の係数が全てゼロでなければならない。これにより

$$\Theta_h=-\Phi_h+\sum_{\substack{h=1\\h>p}}^{p}\Phi_k\Theta_{h-k}\quad \text{for } h=1,\ \cdots,\ p$$

$$\Theta_h=\sum_{k=1}^{p}\Phi_k\Theta_{h-k}\quad \text{for } h=p+1,\ \cdots,\ \infty$$

なる漸化式を得る。$h=1$ ならば $\Theta_1=-\Phi_1$ であり，$h=2$ ならば $\Theta_2=-\Phi_2+\Phi_1\Theta_1$ である。これにより VAR(p) を VMA(∞) 表現にしたときの MA 係数は AR 係数で表わせることがわかった。

4．2　システムの誤差分散行列の対角化

$m\times m$ の正値定符号行列 X について

$$X=LDU$$

ただし

L：対角要素が 1 の下三角行列

D：正の要素を持つ対角行列

$U=L'$（上三角行列）

という「LDU 分解」が一意に存在する（Choleski 分解ともいわれる）。LDU 分解を使えば，

$$D=L^{-1}XU^{-1}=L^{-1}X(L^{-1})'=(U^{-1})'XU^{-1}$$

として X の対角化ができる。下（上）三角行列の逆行列は下（上）三角行列となることに注意。

y_t が $\Phi(L)y_t=u_t$ なる VAR(p) 過程に従い，$V_{ar}(u_t)=\Sigma$ ならば上の結果より

$$L^{-1}\Phi(L)y_t=L^{-1}u_t$$

or

$$\Phi^*(L)y_t=u_t^* \quad \text{ただし } Var(u_t^*)=D\ (\text{対角行列})$$

として変換できる。

4．3　インパルス応答関数

m 次元ベクトル y_t の中の一つの変数 y_{jt} へ，u_{it} を通じて suprise shock を与えることを考える。もし u_t の誤差項の分散共分散行列 Σ が対角でないなら，u_{it} と他の誤差項の共分散はゼロではないので「u_{it} への単独の shock」は考えられない。そこで前節の Choleski 分解による変換後の u_t^* 使って VAR(p) を表すと

$$\begin{aligned} y_t &= \Phi_1 y_{t-1}+\Phi_2 y_{t-2}+\cdots+\Phi_p y_{t-p}+Lu_t^* \\ &=\Theta_0 Lu_t^*-\Theta_1 Lu_{-1}^*-\cdots-\Theta_k Lu_{t-k}^*-\cdots \\ &=\Theta_0^* u_t^*-\Theta_1^* u_{t-1}^*-\cdots-\Theta_k^* u_{t-k}^*-\cdots \end{aligned} \tag{7}$$

となる。ただし $\Theta_0=I_m$ であり $\Theta_k^*\equiv\Theta_k L\ (k=0,\ 1,\ \cdots)$ である。従って「u_{it}^* への単独の shock」を考えることにより，y_t ベクトルの各変数への影響を見ることができる。

時点	$\cdots$	$t-2$	$t-1$	t	$t+1$	$t+2$	$\cdots$
u_t^*	$\cdots$	0_m	0_m	$\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}(\equiv e_i)$	0_m	0_m	$\cdots$

上の表のように時点 t において u_i^* へ 1 単位のショックを与える。ただし 0_m は m 次元のゼロ・ベクトルである。上の式より，このときの y_t への影響をみるには y_t を u_{it}^* で偏微分すればよい。

$$\frac{\partial y_t}{\partial u_{it}^*}=\Theta_{\cdot i,0}^*\sim m\times 1 \quad となる。ただし\ \Theta_0^*=[\Theta_{\cdot 1,0}^*,\ \Theta_{\cdot 2,0}^*,\ \cdots,\ \Theta_{\cdot m,0}^*]\sim m\times m$$

すなわち $\Theta_{\cdot i,0}^*$ は Θ_0^* の第 i 列である。次の期には VMA(∞) は

$$y_{t+1}=u_{t+1}^*-\Theta^* u_t^*-\cdots-\Theta_k^* u_{t-k}^*-\cdots$$

と書けるから，y_{t+1} への影響を見るには y_{t+1} を u_{it}^* で偏微分すればよい。すると

$$\frac{\partial y_{t+1}}{\partial u_{it}^*}=-\Theta_{\cdot i,1}^*\sim m\times 1 \quad となる。ただし\ \Theta_1^*=[\Theta_{\cdot 1,1}^*,\ \Theta_{\cdot 2,1}^*,\ \cdots,\ \Theta_{\cdot m,1}^*]\sim m\times m\ である。$$

同様にして y_{t+h} への影響は

$$\frac{\partial y_{t+h}}{\partial u_{it}^*}=-\Theta_{\cdot i,h}^*\sim m\times 1$$

で与えられる。まとめると u_i^* へ 1 単位のショックを与えると，その影響は

$$\Theta_{\cdot i,0}^*,\ -\Theta_{\cdot i,1}^*,\ -\Theta_{\cdot i,2}^*,\ \cdots,\ -\Theta_{h,\cdot i}^* \tag{8}$$

としてシステム全体の m 個の変数へ波及していく。これをインパルス応答関数という。TSP では，各方程式毎にその方程式の誤差項に 1 単位のショックを与えたときの全変数の応答が h 期先までプリントアウトされる。

ここで注意すべきことは y_t の中の変数の順序を変えると Σ が変わるため L も変わることである。すなわちショックの伝達経路が異なることになる。従ってインパルス応答関数の結果はモデルにおける変数の順番に依存する。下三角行列 L を使って Cholesky 分解を行なうときは，y_t ベクトルの上の方に比較的独立性の強い変数，下の方に比較的内生性の強い変数を置く配列がとられる（上三角行列を使うときは逆になる）。これは Sims（1980）が提唱した方法で，多くの研究もそれにならっている。もし並べ方に確信のないときには，いくつもの並べ方を試みて，それに依存しない変数間の関係のみを採用するのが安全である。

4．4　予測誤差分散分解

VAR(p) の VMA(∞) 表現

$$y_t=\sum_{i=0}^{\infty}\Theta_i u_{t-i}=\sum_{i=0}^{\infty}\Theta_i^* u_{t-i}^*$$

を使うと h 期先の予測量 $\hat{y}_{t+h}$ を計算するには将来の $u_{t+i}(i>0)$ をゼロと置くから

$$\hat{y}_{t+h}=\sum_{i=h}^{\infty}\Theta_i u_{t+h-i}=\sum_{i=0}^{\infty}\Theta_i^* u_{t+h-i}^*$$

となる。よって h 期先の予測誤差は

$$y_{t+h}-\hat{y}_{t+h}=\sum_{i=0}^{h-1}\Theta_i u_{t+h-i}=\sum_{i=0}^{h-1}\Theta_i^* u_{t+h-i}^*$$

である。$e_j\equiv(0,\ \cdots,\ 0,\ [j\text{番目}]\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0)'\sim m\times 1$ とすれば第 j 変数についての予測誤差は

$$\begin{aligned}y_{j,t+h}-\hat{y}_{j,t+h}&=e_j'(y_{t+h}-\hat{y}_{t+h})\\&=\sum_{i=0}^{h-1}e'_j\overset{*}{\underset{i}{\Theta}}u_{t+h-i}^*\\&=\sum_{i=0}^{h-1}(\theta_{j1,i}^*u_{i,t+h-i}^*+\cdots+\theta_{jm,i}^*u_{m,t+h-i}^*)\\&=\sum_{k=1}^{m}(\theta_{jk,0}^*u_{k,t+h}^*+\cdots+\theta_{jk,h-1}^*u_{k,t+1}^*)\end{aligned}$$

となる。最後の表現は，予測誤差 $y_{j,t+h}-\hat{y}_{j,t+h}$ を各変数に対するイノベーション（$u_{k,t+h}^*$, $\cdots$, $u_{k,t+1}^*$）ごとに分解したものである。$\{u_t^*\}$ がホワイト・ノイズであることと

$$Eu_t^*u_t^{*\prime}=D=\text{diagonal}\{\sigma_{kk}\}\sim m\times m$$

であることを使うと

$$\begin{aligned}MSE[\hat{y}_{j,t}]&=E(y_{j,t+h}-\hat{y}_{j,t+h})^2\\&=\sum_{k=1}^{m}\sigma_{kk}(\theta_{jk,0}^{*2}+\cdots+\theta_{jk,h-1}^{*2})\\&=\sum_{k=1}^{m}\left\{\sum_{i=1}^{h-1}\sigma_{kk}\theta_{jk,i}^{*2}\right\}\end{aligned}$$

を得る。最後の表現の｛　｝内は，$MSE[\hat{y}_{j,t}]$ のうち，第 k 変数に対するイノベーションに起因する部分と解釈できる。従って，時点 t における $y_{j,t+h}$ の最適予測の MSE のうち第 k イノベーションに起因する部分の割合は

$$\mathrm{RVC}_{k\to j}(h)=\frac{\sum_{i=0}^{h-1}\sigma_{kk}\theta_{jk,i}^{*2}}{MSE[\hat{y}_{j,t}]}=\frac{\sum_{i=0}^{h-1}\sigma_{kk}\theta_{jk,i}^{*2}}{\sum_{k=1}^{m}\{\sum_{i=0}^{h-1}\sigma_{kk}\theta_{jk,i}^{*2}\}} \tag{9}$$

として計算される。これは相対的分散寄与率 relative variance contribution とよばれる。相対的分散寄与率を使った分析を予測誤差分散分解という。

もし $\mathrm{RVC}_{j\to j}(h)$ が高ければ第 j 変数は独立性または自律性が高いといえる。もし $\mathrm{RVC}_{k\to j}(h)$ に高いものがあれば，第 k 変数から第 j 変数への影響が高いとみなせる。このように予測誤差分散分解は Granger の因果性とは別の因果性の情報を与える。TSP では各方程式毎に 1 期先から一定期先までの各変数からの相対的分散寄与率を計算する。なお各変数からの相対的分散寄与率の

和は

$$\sum_{k=1}^{m} \mathrm{RVC}_{k\to j}(h)=\sum_{k=1}^{m}\frac{\sum_{i=0}^{h-1}\sigma_{kk}\theta_{jk,i}^{*2}}{\sum_{k=1}^{m}\{\sum_{i=0}^{h-1}\sigma_{kk}\theta_{jk,i}^{*2}\}}=1$$

である。前述のインパルス応答関数の場合と同様に変数の順序には注意する必要がある。

5. 誤差修正モデルと Johansen の共和分検定

第5節と第6節では，非定常な多変量時系列モデルを扱う。
Johansen の共和分検定については Johansen（1991）や Johansen and Juselius（1990）に詳しく説明されている。

各要素が単位根を持つ m 次元の確率変数ベクトル $y_t \sim I(1)$ を考える。この y_t は VAR(p)

$$y_t=\mu+\sum_{i=1}^{p}\Phi_i y_{t-i}+\varepsilon_t, \tag{10}$$

で表されると仮定する。このモデルをベクトル誤差修正モデル Vector Error-Correction Model（VECM）で表わすと

$$\Delta y_t=\mu+\sum_{i=1}^{p-1}C_i\Delta y_{t-i}+C_p y_{t-p}+\varepsilon_t, \tag{11}$$

となる[1)]。ただし $C_i\equiv-(I_m-\sum_{j=1}^{i}\Phi_j)$ $(j=1,\cdots,p)$ である。
(11)式はは単位根検定のときの ADF の式に対応している。Johansen（1988）の共和分検定は，係数 C_p のランク r は独立な共和分ベクトルの数に等しい，という性質に基づいて行列 C_p の固有値を使って検定統計量をつくる。$C_p \sim m\times m$ の m 個の固有値が $\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_m$ で与えられたとする。もしベクトル y_t に共和分関係がないならば，C_p のランクはゼロであり，すべての固有値 λ_i はゼロである。このとき $\ln(1-\lambda_i)$ はそれぞれゼロとなる。同様に y_t に共和分関係が1つだけ存在するならば，C_p のランクは1であり，従って $0<\lambda_1<1$ より $\ln(1-\lambda_1)$ は負の値をとり，その他の $\lambda_i=0$ より $\ln(1-\lambda_2)=\cdots=\ln(1-\lambda_m)=0$ である。

実際には最尤推定により C_p を推定し，その固有値の推定値 $\hat{\lambda}_i$ を得る。Johansen（1988）は次の2つの検定統計量を提案している。

トレース検定　$H_0: r\leq i \quad vs.H_1: r=m,\ (i=0,1,\cdots,m)$

$$\lambda_{\text{trace}}=-T\sum_{i=r+1}^{m}\ln(1-\hat{\lambda}_i) \tag{12}$$

最大固有値検定　$H_0: r=i \quad vs.H_1: r=i+1,\ (i=0,1,\cdots,m)$

$$\lambda_{\max}=-T\ln(1-\hat{\lambda}_{r+1}) \tag{13}$$

1）例えば Enders（1995, p. 390）を参照してほしい。

この２つの検定を組合わせて共和分ベクトルの数を検定する。まずトレース検定で大まかな数を出し，最大固有値検定で細かくみる。

Johansen and Juselius（1990）ではトレンド項やダミー変数を含めたモデル

$$y_t=\mu_0+\mu_1 t+\Psi D_t+\sum_{i=0}^{p}\Phi_i y_{t-1}+\varepsilon_t, \tag{14}$$

or

$$\Delta y_t=\mu_0+\mu_1 t+\Psi D_t+\sum_{i=1}^{p-1}C_i\Delta y_{t-i}+C_p y_{t-p}+\varepsilon_t, \tag{15}$$

においても同様にトレース検定統計量，最大固有値検定統計量を構築できることを示している。ただし D_t は平均ゼロとなるように変換されたダミー変数のベクトルである。例えば T^* 年分の四半期データ（標本数 $4T^*$）を扱っているならば $D_t\sim 3\times 1$ であり，対応する四半期でダミーの値は１ではなく3/4，対応しない四半期で０ではなく －1/4となる。

単位根の検定において定数項やトレンド項の存在が検定統計量の分布に影響を与えるのと同様に，DGP とモデルにおける定数項やトレンド項の有無が共和分の検定統計量の漸近分布に影響を与える。Osterwald-Lenum（1992）がいくつかの DGP とモデルについて検定統計量の棄却値を与えているので，通常はその表を用いる。モデルに定数項もトレンド項もないならば，Osterwald-Lenum（1992）の table 0を，定数項付きならば table 1を，定数項とトレンド項が含まれているならば table 2を使う。ただしダミー変数が含まれていてもいなくても統計量の漸近分布には変わらない。

Johansen の検定の枠組みでは線形制約の検定が可能である。このために Johansen は C_p のランクが r のとき２つの $m\times r$ の行列 α, γ を

$$C_p=\gamma\alpha'$$

として定義している。この α は γ 個の共和分ベクトルの α_1, …, α_r $(\alpha_i\sim m\times 1)$ を使って

$$\alpha=[\alpha_1\cdots\alpha_r]\sim m\times r$$

表わされる。この α, γ は OLS で推定しようとしても識別不可能なため推定できない。しかしながら１）⒂式の Error Correction Model を最尤推定し，２）$\hat{C}_p$ の固有値，固有ベクトルを求め，２）共和分検定で $\hat{C}_p$ のランク γ を決定，３）有意な γ 個の固有値に対応する γ 個の個有ベクトルが α_1, …, α_r であるので $\hat{\alpha}$ を得る。４）$\hat{C}_p$ と $\hat{\alpha}$ より $\hat{\gamma}$ が求まる。

線形制約の検定では，例えば帰無仮説を

$$\mathrm{H}_0 : R\alpha=d \quad \mathrm{rank}(R)=s$$

として C_p の制約付きの固有値の推定量 $\hat{\lambda}_i^*$ $(i=1, \cdots, m)$ と制約無しの固有値の推定量 $\hat{\lambda}_i$ を使えば[2]，尤度比検定統計量

2） $\hat{\lambda}_i^*$ を最尤推定する方法は，例えば Banerjee *et al.*（1994）を参照して欲しい。

$$-T\sum_{i=r+1}^{m}[\ln(1-\hat{\lambda}_i^*)-\ln(1-\hat{\lambda}_i)] \tag{16}$$

は帰無仮説の下で漸近的に自由度 s の χ^2 分布に従う。詳しくは Johansen（1991）を参照して欲しい。

Johansen（1991）が示しているように，共和分関係を表わす $\gamma\alpha' y_{t-p}$ に定数項やトレンド項を含めることも可能である。定数項だけを含む VEC モデル

$$\Delta y_t=\mu_0+\Psi D_t+\sum_{i=1}^{p-1}C_i\Delta y_{t-i}+\gamma\alpha' y_{t-p}+\varepsilon_t, \tag{17}$$

は

$$\Delta y_t=\Psi D_t+\sum_{i=1}^{p-1}C_i\Delta y_{t-i}+\gamma(\alpha'\ \ \alpha_0)(y_{t-p}'\ \ 1)'+\varepsilon_t, \tag{18}$$

と書き換えることができる。また定数項とトレンド項を含むモデル(15)式は

$$\Delta y_t=\mu_0+\Psi D_t+\sum_{i=1}^{p-1}C_i\Delta y_{t-1}+\gamma(\alpha'\ \ \alpha_0^*)(y_{t-p}'\ \ t)'+\varepsilon_t, \tag{19}$$

と書き換えることができる。このように変換されたモデルを最尤推定し，Johansen の検定を行なう場合には，もとのモデルの時とは検定統計量の分布が異なる。(18)式のモデルでは Osterwald-Lenum（1992）の table 1* を，(19)式のモデルでは table 2* を使う。

具体的に Johansen の検定の手順を示す。

Step 0　分析の対象となる時系列データについて単位根検定を行なう。$I(1)$ である変数のみを使って Step 1 から Step 4 まで行なう。

Step 1　(14)式のモデルにおいてラグ次数 p を選択する。ただし季節調整済みデータならダミー変数ベクトルは必要ない。選択方法は最大ラグ次数を設定し，1）F 検定により逐次検定するか，2）AIC 等の情報量基準を使う。

同様にして，(14)式のモデルの定数項，トレンド項の有意性を F 検定により検定する。もしくは定数項，トレンド項を含めるべきかどうか情報量基準により判断する。

Step 2　Step 1 により定数項もトレンド項も含まないモデルが選択された場合は Step 3 へ。Step 1 により (17)式の定数項付きのモデルや(14)式の定数項とトレンド項付きのモデルが選択された場合は，誤差修正項に定数項，トレンド項を含めるかどうか経済学的意味等から決める。

Step 3　選択された VEC モデルを最尤法により推定する。(12)(13)式の検定統計量により共和分検定を行ない，独立な共和分ベクトルの数 r を決める。共和分ベクトルからなる行列 α の推定値を求める。

Step 4　共和分ベクトルからなる行列 α について有意性の検定，線形制約の検定を尤度比検定により検定する。これらの結果に基づき，正しく特定化された誤差修正項を推定する。

Step 5　Step 0 で $I(0)$ 変数があった場合は Step 6 へ。分析の対象となる時系列データがすべて $I(1)$ である場合は，推定された VEC モデルを使って因果性の分析を行なう。

Step 6　1）推定された誤差修正項により，自己回帰分布ラグ・モデルの誤差修正モデルを構築し，予測を行なう。もしくは2）Toda and Yamamoto（1995）の VAR により因果性の分析を行なう。

以上は厳密な手順であるが，多くの実証分析では Step 1，2 を簡略化して何の理由もなく⒁式や⒄式の VAR を使ったり，Step 4 を省略したりしている。論文によっては Step 5，6 を行なわないものもある。

Johansen の共和分検定を使った実証分析は数多く存在するが，代表的なものをいくつか紹介する。Enders and Hurn（1994）は Purchasing Power Parity を一般化した概念を検証するために，Johansen の共和分検定，線形制約の検定を使っている。Friedman and Kuttner（1992）は共和分検定を使って貨幣と所得，利子率に有意な共和分関係があることを見いだしている。この論文では innovation accounting による因果性の分析を行なっている。Baba, Hendry, and Starr（1992）では，貨幣需要関数を推定するために共和分検定を行ない，自己回帰分布ラグ・モデルの誤差修正モデルを構築している。Asai and Shiba（1996）は日本の株価とマクロ経済変数間の関係を分析するために，Toda and Yamamoto（1995）の VAR を使って Granger の因果性の分析，innovation accounting を行なっている。

6．誤差修正モデルと因果性の分析

単位根をもつ m 変数の VAR

$$y_t=\mu_0+\mu_1 t+\sum_{i=1}^{p}\Phi_i y_{t-i}+\varepsilon_t,$$

を考える。簡単のためダミー変数は省いているが以下の結果についても拡張できる。もし各変数が共和分の関係にないならば，階差をとった変数の VAR

$$\Delta y_t=\mu_0+\mu_1 t+C_1\Delta^d y_{t-1}+\cdots+C_{p-1}\Delta y_{t-p+1}+\varepsilon_t$$

で Garnger の因果性の分析，inovation accounting が行なえる。もし各変数が共和分の関係にあるならば VECM 表現

$$\Delta y_t=\mu_0+\mu_1 t+C_1\Delta y_{t-1}+\cdots+C_{p-1}\Delta y_{t-p-1}+C_p y_{t-1}+\varepsilon_t \tag{20}$$

で分析をする。この場合の因果性分析については6．1節，6．2節で説明する。

6．1　VACM と Granger 因果性性の検定

各変数が共和分の関係にある場合の Granger 因果性分析の方法として，ここでは3種類の方法を紹介する。すなわち1）Toda and Phillips（1993）による VECM 表現による検定，2）Phillips（1995）による Fully-modified VAR（FM-VAR）による検定，3）Toda and Yamamoto（1995）による Lag-augmented VAR（LA-VAR）による検定である。Toda and Yamada（1996）

は３つの検定のサイズと検出力をシミュレーション実験により比較している。サイズは，LA-VAR による方法が一番パフォーマンスが良く，FM-VAR による方法は size-distortion が起きやすい。検出力は比較的 FM-VAR による方法のパフォーマンスが良いが，これは行列 Φ_i ($i=1, \cdots, p$) のパラメータに強く依存しているため，一概にはいえない。従って Toda and Yamada（1996）はパラメータの推定結果をよく検討して，これらの方法を使うべきだと結論している。しかしながら実際の実証分析において実験結果の枠組みに合うように検討することは困難であり，分析者の主観によりどの方法を使うべきか判断するしかない。

これらの方法のうち一番簡単な Toda and Yamamoto（1995）の LA-VAR による方法を詳しく紹介する。この方法では可能な単位根の次数だけ VAR のラグを拡張する。例えば経済変数では単位根の次数は大抵１か２であるから，真のラグ次数 p に２を加えた VAR($p+2$)

$$y_t=\gamma_0+\gamma_1 t+\Phi_1 y_{t-1}+\cdots+\Phi_p y_{t-p}+\Phi_{p+1} y_{t-p-1}+\Phi_{p+2} y_{t-p-2}+\varepsilon_t$$

を推定すれば，Wald 検定により Granger の因果性の検定を行なうことができる。この方法は効率性が落ちるという欠点があるものの，単位根や共和分の有無にかかわらず使えるという利点をもつ。さらに VAR の変数として，レベルの変数と単位根を持つ変数をが混在してもよいので経済学的解釈が容易である。なおラグ次数の選択も線形制約の検定として Wald 検定により行なえる。

6．2　VECM と Innovation Acounting

VECM 表現のままでは innovation accounting を行なうことはできない。Friedman and Kuttner（1992）では誤差修正項なしの階差系列の VAR を使って innovation accounting を行なっているが，VECM を推定した後ではこれは使っていない。Enders（1995, p. 400）では VECM を使って innovation accounting を行なうことができると述べているが，おそらく，「VECM 表現で推定されたパラメータを使って元の VAR 表現に直し，さらに VMA(∞) 表現により innovation accounting を行なう」ということであろうと思われる。なお Toda and Yamamoto（1995）の LA-VAR を構築すればそのまま innovation accounting を行なえる。

7．実際のデータを使った例：日米間における PPP の検証

7．1　Ardeni and Lubian（1991）の枠組み

完全競争，同一の選好，貿易に障壁は存在しない，取引費用はないと仮定する。このとき一物一価の法則より，異なる国々においてその通貨単位に関わらず商品の価格は一つである。時点 t における j 国の通貨と k 国の通貨の交換比率を $S_{t,jk}$（k 国通貨建て）とする。$P_{t,j}$ と $P_{t,k}$ をそれぞれ j 国と k 国の物価指数とする。この指数に組み入れられているすべての商品に一物一価の法則が正確に成り立っていて，かつ両国のウェイトが等しいと仮定されるとき，PPP の 'absolute' version は次の回帰モデルで検定される。

$$s_{t,jk}=\alpha_0+\alpha_1 p_{t,j}+\alpha_2 p_{t,k}+u_t \tag{21}$$

ただしすべての変数は対数変換されたものである。

A を2国間の裁定の不完全さを反映する定数とすると，このとき $S_{t,jk}=A(P_{t,j}/P_{t,k})$ であり，PPP の 'relative' version は次の回帰モデルで検定される。

$$\Delta s_{t,jk}=\alpha_0+\alpha_1\Delta p_{t,j}+\Delta\alpha_2 p_{t,k}+v_t \tag{22}$$

どちらの回帰モデルでも帰無仮説は

$$\mathrm{H}_0: \alpha_0=0 \text{ and } \alpha_1=-\alpha_2=1$$

である。仮説 $\alpha_1=-\alpha_2$ は2つの価格変数の係数の大きさが等しいことを意味しており，これは 'symmetry' hypothesis として知られている。仮説 $\alpha_1=-\alpha_2=1$ はまた 'proportionality' hypothesis として知られている。

多くの経済変数は単位根をもつために，上記のような回帰分析を行なうと suprious regression となる可能性がある。このためでは Ardeni and Lubian（1991）では augmented Dickey-Fuller 検定や Engle-Granger 検定を使い，単位根と共和分の問題を検討している。本稿では Ardeni and Lubian（1991）とは異なる標本期間のデータを使い，Engle-Granger 検定ではなく Johansen の共和分検定を行なってみる。

7.2 データ

円/ドル・レートの月次データ（月中平均）は経済統計月報を，日本の消費者物価指数（総合，90年基準）の月次データは物価統計月報を参照した。アメリカの消費者物価指数の月次データは International Monetary Fund の Interbational Financial Statistics を参照し，90年基準となるようにデータを加工した。標本期間はいずれも1976年1月から1991年12月であり，モデルの推定には1976年1月から1990年12月までのデータを使用する。なお CPI のデータはどちらも季節調整されていないので，TSP のコマンド SAMA を用いて季節調整を行なった。[3)]

7.3 実証結果

Dolado, Jenkinson, and Sosvilla-Rivero（1990）の方法で Augmented Dickey-Fuller（ADF）検定を行なった結果を表1に示す。ラグ次数は最大ラグ次数（maxlag）を12とし Pantula, Gonzalez-Farias, and Fuller（1994）の方法で AIC により選択した。この方法は，AIC により選択されたラグ次数が j ならば，size distortion を避けるためにラグ次数を Min（j+2, maxlag）とするものである。ADF 検定の結果により，有意水準10パーセントで，為替レートの対数には単位根があるが，その階差系列は定常であると判断される。また日本の CPI の対数は定常であると判断される。合州国の CPI の対数には単位根があるが，その階差系列は定常であると判断される。Ardeni and Lubian（1991）は，先進7カ国の1971年から1986年の月次データを使って単

3） ここでは簡単な実証分析例の作成を目的としているため，TSP で利用可能なコマンドを使ったが，実際の分析ではよりすぐれた季節調整の方法を使用するべきである。また TSP には季節ダミーを含んだモデルの単位根検定，共和分検定ができるようになっている。

表１：ADF 検定

変数名	ラグ次数	τ_{ct}	トレンド項	τ_c	定数項	τ
s	5	−2.213 [0.48]	−1.865	−1.189 [0.68]	1.112	−1.43 [0.14]
Δs	4	−5.271 [0.00006]	0.080	—	—	—
p_J	2	−3.525 [0.04]	1.979	−4.631 [0.0001]	4.790	—
p_A	11	−2.778 [0.21]	2.152	−2.459 [0.13]	2.545	0.827 [0.89]
Δp_A	2	−4.894 [0.0003]	−2.811	—	—	—

τ_{ct} と τ_c，τ はそれぞれ，定数項およびトレンド項つきの回帰による検定統計量，定数項つきの回帰による検定統計量，定数項やトレンド項を含まない回帰による検定統計量を示す。ただし[　]内は TSP の出力した P 値である。「トレンド項」と「定数項」はそれぞれの係数の t 値を示す。

位根検定をしているが，日本の CPI の対数以外はここでの結果と同じ結論を得ている。彼らは，日本の CPI の対数について10パーセント水準で単位根があるという帰無仮説を棄却できるが，５パーセント水準では棄却できないと報告している。

この結果から PPP 仮説が成り立たないことは明らかであるが，計算例として，s_t と p_{At} が共和分関係にあるかどうか検定してみる。

表２：Johansen のトレース検定と最大固有値検定

仮説	トレース検定	90％臨界値
$H_0: r \leq 1$ vs $H_1: r=2$	3.550[0.056]	2.57
$H_0: r=0$ vs $H_1: r=2$	15.146[0.130]	16.06

仮説	最大固有値検定	90％臨界値
$H_0: r=1$ vs $H_1: r=2$	9.634	2.69
$H_0: r=0$ vs $H_1: r=1$	13.211	14.84

90％臨界値はいずれも Osterwald-Lenum（1992：Table 2）による。[　]内は TSP の出力した P 値を示す。

定数項とトレンド項をもつモデルを使って，Johansen のトレース検定と最大固有値検定を行なった結果を表２に示す。ただしラグ次数は AIC により選択した。まずトレース検定で大まかに独立な共和分ベクトルの数を判断し，次に最大固有値検定で細かく判断する。トレース検定の結果を見ると，仮説を「$H_0: r \leq 1$ vs $H_1: r=2$」とすると帰無仮説は有意水準10パーセントで棄却されるので独立な共和分ベクトルの数は２と判断される。最大固有値検定の結果を見ると，仮説を「$H_0: r=1$ vs $H_1: r=2$」とすると帰無仮説は有意水準10パーセントで棄却されるので独立な共和分ベクトルの数は２と判断される。これらの結果より対数為替レートと合州国の対数 CIP は共和分関係にある。２つの独立な共和分ベクトルの推定値は基準化されて

$$s_t - 0.626 p_{At} (\equiv ec_{1t})$$

$$s_t - 7.635 p_{At} (\equiv ec_{2t})$$

となる。

次に Johansen の線形制約の検定を使って共和分ベクトルの各パラメーターの有意性を検定したいのだが，TSP の coint コマンドではできない。TSP や SHAZAM 等を使って Johansen の線形制約の検定のプログラムを作成するしかない。

ちなみに Ardeni and Lubin（1991）等のいくつかの実証分析の結果では先進国間では PPP 仮説は成り立っていないと結論されている。

以下に分析に使った TSP のプログラムと結果の一部を掲載する。

```
1   options crt ; freq m ;
3   smpl 70 : 1   96 : 12 ;
4   load (file='forex. dat', byvar) ex cpi ;
5    smpl 75 : 6   77 : 9 ;
6    load cpia 1 ;                                  138.1
6    139.6  140.0  140.7  141.5  142.4  143.0
6    143.3  143.7  144.0  144.6  145.5  146.3
6    147.1  147.8  148.4  149.0  149.4  149.9
6    150.7  152.3  153.2  154.4  155.3  156.3
6    157.0  157.6  158.2 ;
7      cpia = cpia 1 *(114.1 / 158.2)*(118.8 / 181.9)*(111.3 / 145.4)*(111.1 / 134.9) ;
8    smpl 77 : 9   82 : 9 ;
9    load cpia 2 ;
9                  114.1  114.5  115.0  115.4
9    116.1  116.9  117.7  118.8  119.9  121.2
9    122.0  122.7  123.6  124.6  125.3  125.9
9    127.0  128.5  129.7  131.2  132.8  134.4
9    135.8  137.2  138.6  139.8  141.1  142.6
9    144.7  146.7  148.8  150.4  151.9  153.6
9    153.7  154.7  156.1  157.5  158.9  160.3
9    161.6  163.3  164.5  165.5  166.9  168.3
9    170.2  171.5  173.3  173.6  174.1  174.6
9    175.2  175.8  175.6  176.4  178.1  180.3
9    181.3  181.6  181.9 ;
10     cpia = cpia 2 * (118.8 / 181.9) * (111.3 / 145.4) * (111.1 / 134.9) ;
11   smpl 82 : 9   88 : 9 ;
12   load cpia 3 ;
12                 118.8  119.2  119.0  118.5
12   118.8  118.8  118.9  119.7  120.4  120.8
12   121.3  121.7  122.3  122.6  122.8  123.0
12   123.7  124.2  124.5  125.1  125.5  125.9
12   126.3  126.8  127.4  127.8  127.8  127.8
12   128.1  128.6  129.2  129.7  130.2  130.6
12   130.8  131.1  131.5  131.9  132.3  132.7
12   133.1  132.7  132.1  131.8  132.2  132.9
12   132.9  133.1  133.8  133.9  134.0  134.2
12   135.0  135.5  136.1  136.8  137.2  137.8
12   138.1  138.9  139.5  139.9  140.1  140.0
12   140.4  140.8  141.4  142.1  142.6  143.2
12   143.8  144.4  145.4 ;
```

```
13    cpia = cpia 3 * (111.3 / 145.4) * (111.1 / 134.9) ;
14  smpl 88 : 9   93 : 9  ;
15  load cpia 4  ;
15                  111.3  111.7  111.8  112.0
15  112.5  113.0  113.7  114.4  115.1  115.3
15  115.6  115.8  116.2  116.7  117.0  117.2
15  118.4  119.0  119.6  119.8  120.1  120.7
15  121.2  122.3  123.3  124.1  124.3  124.3
15  125.1  125.3  125.5  125.7  126.0  126.4
15  126.6  127.0  127.5  127.7  128.1  128.2
15  128.3  128.8  129.5  129.6  129.8  130.3
15  130.6  130.9  131.3  131.8  132.0  131.9
15  132.5  133.0  133.5  133.8  134.0  134.2
15  134.2  134.6  134.9 ;
16    cpia = cpia 4 * (111.1 / 134.9) ;
17  smpl 93 : 9   94 : 12 ;
18  load cpia 5  ;
18                  111.1  111.5  111.6  111.6
18  111.9  112.3  112.7  112.8  112.9  113.3
18  113.6  114.0  114.3  114.4  114.6  114.6 ;
19  cpia = cpia 5  ;
20  smpl 75 : 7   93 : 12 ;
21  lex=log (ex) ; lcpi=log (cpi) ; lcpia=log (cpia) ;
24  sama lcpi lcpi ; sama lcpia lcpia ;
26
26  smpl 76 : 1   93 : 12 ;
27  dlex=lex-lex (- 1 ) ; dlcpi=lcpi-lcpi (- 1 ) ;
29  dlcpia=lcpia-lcpia (- 1 ) ; trend t ;
31
31  smpl 76 : 1   92 : 12 ;
32  coint (df, maxlags=12, const, trend, rule=aic2, NOWS, print) lex ;
33  coint (df, maxlags=5, minlags=5, const, notrend, rule=aic2, NOWS, print) lex ;
34  coint (df, maxlags=5, minlags=5, noconst, notrend, rule=aic2, NOWS, print) lex ;
35  coint (df, maxlags=12, const, trend, rule=aic2, NOWS, print) dlex ;
36
36  coint (df, maxlags=12, const, trend, rule=aic2, NOWS, print) lcpi ;
37  coint (df, maxlags=2, minlags=2, const, notrend, rule=aic2, NOWS, print) lcpi ;
38  coint (df, maxlags=2, minlags=2, noconst, notrend, rule=aic2, NOWS, print) lcpi ;
39  coint (df, maxlags=12, const, trend, rule=aic2, NOWS, print) dlcpi ;
40
40  coint (df, maxlags=12, const, trend, rule=aic2, NOWS, print) lcpia ;
41  coint (df, maxlags=11, minlags=11, const, notrend, rule=aic2, NOWS, print) lcpia ;
42  coint (df, maxlags=11, minlags=11, noconst, notrend, rule=aic2, NOWS, print) lcpia ;
43  coint (df, maxlags=12, const, trend, rule=aic2, NOWS, print) dlcpia ;
44
44  ????? Trace test
44  smpl 76 : 1   92 : 12 ;
45  ?coint (nounit, joh, noeg, noconst, rule=aic, maxlags= 6 ) lex lcpia ;
45  ?coint (nounit, joh, noeg, const, notrend, rule=aic, maxlags= 6 ) lex lcpia ;
45  coint (nounit, joh, noeg, const, trend, rule=aic, maxlags=12) lex lcpia ;
```

```

????? Maximal Eigenvalue test
set lambda 1  = @tabjoh (1, 8) ; ? from the table for Johansen tests
set lambda 2  = @tabjoh (2, 8) ;
set max 2  = -@nob*log ( 1 -lambda 1 ) ; ? H 0  : r= 1  vs H 1  : r= 2  ;
set max 1  = -@nob*log ( 1 -lambda 2 ) ; ? H 0  : r= 0  vs H 1  : r= 1  ;
print max 2  max 1  ;
```

Current sample : 1976 : 1 to 1992 : 12

Johansen (trace) cointegration tests

Variables : LEX LCPIA

Num lags	0	1	2	3	4
Eigval 1	0.11692	0.056405	0.055933	0.066796	0.078278
Eigval 2	0.037176	0.032302	0.038580	0.036792	0.036437
H 0 : r= 0	30.66066	16.99715	17.92673	19.51096	21.47192
P-val~	0.0013457	0.073843	0.054254	0.031176	0.017311
H 0 : r<= 1	7.16025	6.14026	7.27857	6.85983	6.71828
P-val~	0.0063557	0.011670	0.0059220	0.0076038	0.0082734
Num obs	191.00000	191.00000	191.00000	191.00000	191.00000
LogLike	1266.06419	1323.05379	1328.78325	1331.77653	1333.63365
AIC	-13.17345	-13.72831	-13.74642	-13.73588	-13.71344
Num lags	5	6	7	8	9
Eigval 1	0.070671	0.059216	0.062712	0.065209	0.081007
Eigval 2	0.035769	0.039789	0.046129	0.047858	0.047120
H 0 : r= 0	19.63928	17.99092	19.59839	20.15004	22.69899
P-val~	0.029785	0.053100	0.030222	0.024864	0.012343
H 0 : r<= 1	6.52002	7.18659	8.26464	8.48420	8.25352
P-val~	0.0093105	0.0062565	0.0032828	0.0028781	0.0033047
Num obs	191.00000	191.00000	191.00000	191.00000	191.00000
LogLike	1335.22575	1337.53312	1340.39241	1341.98316	1348.22740
AIC	-13.68823	-13.67050	-13.65856	-13.63333	-13.65683
Num lags	10	11	12	Opt : 2	
Eigval 1	0.078129	0.080349	0.077951	0.057731	
Eigval 2	0.049472	0.052984	0.046992	0.018042	
H 0 : r= 0	22.32266	23.07944	21.33265	15.14576	
P-val~	0.013695	0.011111	0.017986	0.13003	
H 0 : r<= 1	8.57458	9.09137	7.94171	3.55024	
P-val~	0.0027264	0.0019999	0.0039831	0.056081	
Num obs	191.00000	191.00000	191.00000	201.00000	
LogLike	1349.68363	1353.18218	1354.85338	1404.11032	
AIC	-13.63020	-13.62494	-13.60056	-13.81204	

Cointegrating vectors for lag 0

	1	2
LEX	1.00000	1.00000
LCPIA	-0.28073	-4.85526

Cointegrating vectors for lag 1

	1	2
LEX	1.00000	1.00000
LCPIA	-1.13180	-19.55778

Cointegrating vectors for lag 2

	1	2
LEX	1.00000	1.00000
LCPIA	-0.20154	-4.59846

Cointegrating vectors for lag 3

	1	2
LEX	1.00000	1.00000
LCPIA	-0.56181	-6.28173

Cointegrating vectors for lag 4

	1	2
LEX	1.00000	1.00000
LCPIA	-0.45427	-5.57341

Cointegrating vectors for lag 5

	1	2
LEX	1.00000	1.00000
LCPIA	-0.28055	-4.69541

Cointegrating vectors for lag 6

	1	2
LEX	1.00000	1.00000
LCPIA	-0.12078	-4.09138

Cointegrating vectors for lag 7

	1	2
LEX	1.0000	1.00000
LCPIA	-0.19651	-4.27214

Cointegrating vectors for lag 8

	1	2
LEX	1.00000	1.00000
LCPIA	-0.15739	-4.06098

Cointegrating vectors for lag 9

	1	2
LEX	1.00000	1.00000
LCPIA	0.45853	-2.79825

Cointegrating vectors for lag 10

	1	2
LEX	1.00000	1.00000
LCPIA	0.68621	-2.52093

Cointegrating vectors for lag 11

	1	2
LEX	1.00000	1.00000
LCPIA	-0.19879	-4.14340

Cointegrating vectors for lag 12

	1	2
LEX	1.00000	1.00000
LCPIA	-0.43195	-5.41617

Cointegrating vectors for lag 2

	1	2
LEX	1.00000	1.00000
LCPIA	-0.62554	-7.63488
	MAX 2	MAX 1
Value	13.21192	9.63420

8．結びにかえて

本稿では経済時系列データの因果関係の分析方法をサーベイした。特に非定常な経済時系列データの因果関係を分析する方法に主眼を置いた。本稿が読者諸氏の因果分析の手助けになれば幸いである。

参考文献

1） Ardeni, Pier G.and Diego Lubian（1991）"Is There Trend Reversion in Purchasing Power Parity," *European Economic Review*, 35, 1035-1055.

2） Asai, M. and T. Shiba（1996）"The Japanese Stock Market and the Macroeconomy : An Empirical Investigation," *Financial Engineering and the Japanese Markets*, 2, 259-267.

3） Baba, Y., D. F. Hendry, and R. M. Starr（1992）"The Demand for M 1 in the U. S. A., 1960-1988, " *Review of Economic Studies*, 59, 25-61.

4） Banerjee, A., J. Dolado, J. W. Galbraith, and D. F. Hendry（1994）, *Co. Integration, Error. Correction, and the Econometric Analysis of Non. Stationary Data*, Oxford Univ. Press, Oxford.

5） Dolado, J. J., T. Jenkinson, and S. Sosvilla-Rivero（1990）"Cointegration and Unit Roots," *Journal of Economic Surveys*, Vol. 4, No. 3, pp. 249-273.

6） Pantula, S. G., G. Gonzalea-Farias, and W. A. Fuller（1994）"A Comparison of Unit-Root Test Criteria," *Jouranl of Business and Economics Statistics*, 12, 167-176.

7） Enders, W.（1995）, *Applied Econometric Time Series*, John Wiley ¥& Sons.

8） Enders, W. and S. Hurn（1994）"The Theory of Generalized Purchasing Power Parity : Tests in the Pacific Rim," *Review of International Economics*, 2, 179-190.

9） Friedman, B. and K. Kuttner（1992）"Money, Income, Prices, and Interest Rates," *American Ecxonomic Review*, 82, 472-492.

10） Johansen, S.（1988）"Statistical Analysis of Cointegration Vectors," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12, 231-54.

11） Johansen, S.（1991）"Estimation and Hypothesis Testing of Cointegration Vectors in Gaussian Vector Autoregressive Models," *Econometrica*, 59, 1551-80.

12） Johansen, S. and K. Juselius（1990）"Maximum Likelihood Estimation and Inference on Cointegration - with Applications to the Demand for Money," *Oxford Bullrtin of Economics and Statistics*, 52, 169-210.

13） Osterwald-Lenum, M.（1992）, "A Note with Quantiles of the Asymptotic Distribution of the Maximum Likelihood Cointegration Rank Test Statistics," *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, Vol. 54, No. 3, pp. 461-72.

14) Pillips, P. C. B. (1995) "Fully Modified Least Squares and Vector Autoregression," *Econometrica*, 63, 1023-1078.

15) Sims, C. A. (1980) "Macroeconomics and Reality," *Econometrica*, 48, 1-48.

16) Toda, H. and T. Yamamoto (1995) "Statistical Inference in Vector Autoregressions with Possibly Integrated Processes," *Journal of Econometrics*, Vol. 66, pp. 225-250.

17) Toda, H. and P. C. B. Phillips (1993) "Vector Autoregressions and Causality," *Econometrica*, Vol. 61, No. 6, pp1367-1393.

18) Toda, H. and H. Yamada (1996) "Hypothesis Testing in Possibly Integrated Vector Autoregressions : A Simulation Study," *mimeo.*, Osaka Univ.