

単変量時系列の分析

浅井 学

はじめに

本稿の目的は、単変量時系列を分析する際の理論的な背景と、実用上の手引きを示すことにある。特にソフトウェア・パッケージである TSP を使って、具体例を用いながらコマンドの使い方を学ぶことに主眼を置いている。なお時系列分析の手法を学ぶための標準的な教科書としては Hamilton (1994), Harvey (1981a, b), 山本 (1988) がある。実用的な教科書として Enders (1995) がある。

2. 時系列分析の基本概念

定常な時系列についての分析を行なう。ある時系列 $\{y_t\}$ が定常であるとは、時系列 $\{y_t\}$ の 2 次までのモーメントがどの時点でみても変化しない、すなわち、すべての t に対して

$$E(y_t) = 0$$

$$\text{Cov}(y_t, y_{t-\tau}) = \gamma(\tau), \tau = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

であることをいう。 $\gamma(\tau)$ を自己共分散関数 ACVF (autocovariance function) と呼び、定常時系列では時間差 j だけの関数になっている。この定常性の概念は、より強い意味での概念 (強定常性 strict stationarity) に比べて実用上よく使われ、弱定常性 (weak stationarity) とも呼ばれる。

さて定常性を満たす最も簡単な確率過程は、平均ゼロ、分散 σ^2 で時刻に関して無相関であるようなものである。 $\{\varepsilon_t\}$ をこのような確率過程とすると、すべての t に対して

$$E(\varepsilon_t) = 0$$

$$E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-\tau}) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{if } \tau = 0 \\ 0 & \text{if } \tau \neq 0 \end{cases}$$

である。このような $\{\varepsilon_t\}$ を特にホワイト・ノイズ (white noise) という。 $\{\varepsilon_t\}$ がホワイト・ノイズであることを、本稿では $\varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$ と書く。ときに、異時点間の無相関性よりも強い性質を仮定することが便利なこともある。例えば、 $\{\varepsilon_t\}$ が異時点間で独立で同一の分布に従うと

き, $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$ と書く。さらに, $\{\varepsilon_t\}$ が異時点間で独立で同一の正規分布に従うとき, $\varepsilon_t \sim \text{iidN}(0, \sigma^2)$ と書く。

2.1 自己回帰過程

p 次の自己回帰過程 (autoregressive process) $\{y_t\}$ は

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2) \tag{1}$$

に従う確率過程である。このことを略して $y_t \sim \text{AR}(p)$ と書く。 $L^\tau y_t = y_{t-\tau}$ なるラグ・オペレーター L を使えば(1)は

$$\phi(L)y_t = \varepsilon_t$$

と書ける。ただし $\phi(L) = 1 - \sum_{i=1}^p \phi_i L^i$ である。AR(p) 過程は必ずしも定常とは限らない。以下では定常性のための条件をみる。

一般に p 次の自己回帰過程(1)の定常性の条件 (stationarity condition) は, 実数 z の多項式

$$1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p = 0 \tag{2}$$

の解の絶対値がすべて 1 よりも大きいことである。さて AR(1) の場合について考えてみる。(1) の表現において y_t の過去の値を繰り返し代入していくと

$$\begin{aligned} y_t &= \phi_1 (\phi_1 y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t \\ &= \phi_1^2 (\phi_1 y_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ &\vdots \\ &= \sum_{j=0}^{J-1} \phi_1^j \varepsilon_{t-j} + \phi_1^J y_{t-J} \end{aligned}$$

を得る。ここで $1 - \phi_1 z = 0$ の解の絶対値が 1 よりも大きくなるための条件は $|\phi_1| < 1$ であるから, これにより $\phi_1^J y_{t-J}$ は J を十分に大きくするとき無視できるほど小さくなる。すなわち $|\phi_1| < 1$ ならば

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j \varepsilon_{t-j} \tag{3}$$

と表現してもよい。これは線形確率過程であり, $\sum_{j=0}^{\infty} (\phi_1^j)^2 = 1 / (1 - \phi_1^2) < \infty$ であるので, y_t の平均, 分散及び共分散は時刻 t に依存せず決まる。これにより $|\phi_1| < 1$ ならば $y_t \sim \text{AR}(1)$ は定常過程である。AR(2) の場合についての詳しい定常性の議論が Harvey (1981a, 2.2節) にあるので, それを参照して欲しい。

2.2 移動平均過程

q 次の移動平均過程 (moving average process) は

$$y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (4)$$

に従う確率過程である。このことを略して $y_t \sim \text{MA}(q)$ と書く。ラグ・オペレーター L を使えば (4) は

$$y_t = \theta(L) \varepsilon_t = \left(1 - \sum_{j=1}^q \theta_j L^j\right) \varepsilon_t$$

となる。AR(p) 過程と異なり、MA(q) 過程は常に定常である。

定常な AR(1) 過程は (3) のように書ける。これは

$$y_t = \left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} (-\phi_1^j) L^j\right) \varepsilon_t$$

であるから、無限次の移動平均過程である。このように定常な AR(p) 過程は MA(∞) 過程に書き換えることができる。逆に MA(q) 過程は適当な条件の下で AR(∞) 過程に書き換えることができる。

例として MA(1) 過程を考える。

$$\begin{aligned} y_t &= \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1} \\ &= \varepsilon_t - \theta(y_{t-1} + \theta \varepsilon_{t-2}) \\ &= \varepsilon_t - \theta y_{t-1} - \theta^2(y_{t-2} + \theta \varepsilon_{t-3}) \\ &= -\theta y_{t-1} - \theta^2 y_{t-2} - \dots - \theta^J y_{t-J} + \varepsilon_t - \theta^{J+1} \varepsilon_{t-J-1} \end{aligned}$$

もし $|\theta| < 1$ ならば、最後の項は十分大きな J に対しては無視してよい。すなわち $|\theta| < 1$ ならば

$$y_t = -\sum_{j=1}^{\infty} \theta^j y_{t-j} + \varepsilon_t \quad (5)$$

と書ける。この例における条件 $|\theta| < 1$ のように、MA(q) 過程が AR(∞) 過程として表現可能であるための条件を反転可能条件 (invertibility condition) という。

一般に、MA(q) 過程 (4) が反転可能であるための条件は、実数 z の多項式

$$1 - \theta_1 z - \dots - \theta_q z^q = 0 \quad (6)$$

の根のすべてが単位円の外にあることである。

反転可能条件が、AR 過程の定常性の条件と形式的に同一であることに注意して欲しい。通常、MA(q) 過程及び次節で学ぶ ARMA(p, q) 過程を扱うときは、定常性と共に反転可能性が仮定される。理由は次節で述べる。

2.3 自己回帰移動平均過程

MA 過程と AR 過程を組み合わせた確率過程

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (7)$$

を自己回帰移動平均過程（autoregressive moving average process）といい、略して $y_t \sim \text{ARMA}(p, q)$ などと表す。ラグ・オペレーター L を使って (7) を

$$\phi(L)y_t = \theta(L)\varepsilon_t \quad (8)$$

と書くことができる。

ARAM(p, q) 過程の定常性の条件は AR 部分 $\phi(L)$ にのみ依存する。すなわち

$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p = 0$$

のすべての根が単位円の外にあれば、ARAMA(p, q) 過程 (7) は定常である。他方、ARAM(p, q) 過程の反転可能性の条件は MA 部分 $\theta(L)$ にのみ依存する。すなわち

$$\theta(z) = 1 - \theta_1 z - \dots - \theta_q z^q = 0$$

のすべての根が単位円の外にあれば、ARMA(p, q) 過程 (7) は反転可能である。

さて定常性 [反転可能性] の条件が満たされれば、ARMA(p, q) モデルは $\text{MA}(\infty)$ [AR(∞)] モデルに書き換えることができる。例えば (8) に従う確率過程 $\{y_t\}$ の $\text{MA}(\infty)$ 表現を

$$y_t = \psi(L)\varepsilon_t \quad (9)$$

とする。ただし $\psi(L) = \psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 - \dots$ である。(8) より $y_t = \phi(L)^{-1} \theta(L) \varepsilon_t$ であるから、これと (9) を比較すると、

$$\phi(L)^{-1} \theta(L) = \psi(L) \quad \text{i.e., } \theta(L) = \phi(L) \psi(L)$$

最後の等式の右辺を展開して、両辺の L^τ ($\tau=0, 1, \dots$) の係数を比較すると次の結果を得る。

$$\begin{aligned} \psi_0 &= 1 \\ \psi_j &= -\theta_j + \sum_{i=1}^{\min(j,p)} \phi_i \psi_{j-i} \quad \text{for } j=1, \dots, q \\ \psi_j &= \sum_{i=1}^{\min(j,p)} \phi_i \psi_{j-i} \quad \text{for } j \geq q+1 \end{aligned} \quad (10)$$

上の結果に $q=0$ [$p=0$] を代入すれば、純粋の AR(p) [MA(q)] の場合になる。同様に ARMA(p, q) 過程の AR(∞) 表現の係数も、 ϕ_i と θ_j を使って現すことができる。

ARMA(p, q) モデルの存在価値は、かなり複雑な確率過程を低い次数の p, q によって表現できることにある。ARMA モデルを純粋の MA モデルや AR モデルで表そうとすると、一般に、次数が無限に必要なことになる。

2.4 自己回帰和分移動平均過程

d 回階差をとると (弱) 定常過程になる確率過程を d 次の和分過程 (Integrated of order $d, I(d)$)

と呼ぶ。

$$\Delta^d y_t \sim I(0) \Leftrightarrow y_t \sim I(d)$$

また (p, d, q) 次の自己回帰和分移動平均過程 (autoregressive integrated moving average process) $\{y_t\}$ は

$$\phi(L)\Delta^d y_t = \theta(L)\varepsilon_t \tag{11}$$

に従う確率過程である。略して $y_t \sim \text{ARIMA}(p, d, q)$ などと表す。経済データにおいては、 $d=1, 2$ とした低次の和分過程がよくあてはまることが知られている。

3. 自己相関関数と偏自己相関関数

3.1 自己相関関数と偏自己相関関数

自己共分散関数 (autocovariance function) は第2節の最初で定義された $\gamma(\tau)$ ($\tau=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) である。ただし定義により、 $\tau > 0$ に対して

$$\gamma(\tau) = E(y_t - \mu)(y_{t-\tau} - \mu) = E(y_s - \mu)(y_{s+\tau} - \mu) = \gamma(-\tau), \quad s = t - \tau$$

であるから、 $\tau=0, 1, \dots$ のみを考えればよい。自己相関関数 ACF (autocorrelation function) は

$$\rho(\tau) = \gamma(\tau) / \gamma(0), \quad \tau=0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{12}$$

によって定義される。 $\gamma(\tau)$ と $\rho(\tau)$ は同じ形状をしており、確率過程の性質について同一の情報を提供しているが、 $\rho(\tau)$ は基準化された量であるのでより一般的に用いられる。なお標本自己相関はコレログラムとも呼ばれる。

自己相関 $\rho(\tau)$ を用いた、以下のような連立方程式を考える。

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \cdots & \rho(\tau-1) \\ \rho(1) & 1 & \cdots & \rho(\tau-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(\tau-1) & \rho(\tau-2) & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{\tau 1} \\ \phi_{\tau 2} \\ \vdots \\ \phi_{\tau \tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho(1) \\ \rho(2) \\ \vdots \\ \rho(\tau) \end{pmatrix} \tag{13}$$

このような連立方程式に $\tau=1, 2, \dots$ を与えて解き、 $\phi_{11}, \phi_{22}, \phi_{33}, \dots$ を並べたものを偏自己相関関数 (partial autocorrelation function) という。例えば y_t と $y_{t-\tau}$ の偏自己相関 $\phi_{\tau\tau}$ は、 $y_{-t}, \dots, y_{t-\tau}$ の影響を取り除いた後の y_t と $y_{t-\tau}$ の関係の強さを示す指標である。

AR(p), MA(q), ARMA(p, q), ARIMA($p, 1, q$) 過程の自己相関関数, 偏自己相関関数の形状は次のようになる。

	AR(p)	MA(q)	ARMA(p, q)	ARIMA($p, 1, q$)
自己相関関数	幾何級数的減衰	次数 q までスパイク $q+1$ 次以上はゼロ	幾何級数的減衰	高原状態
偏自己相関関数	次数 p までスパイク $p+1$ 次以上はゼロ	幾何級数的減衰	幾何級数的減衰	1 次でスパイク 2 次以上はゼロ

3.2 自己相関の検定（ t 検定、かばん検定）

もし真の自己相関 $\rho(\tau)$ が $\rho(\tau)=0$ であれば、標本自己相関

$$\hat{\rho}(\tau) = \frac{\sum_{t=\tau+1}^T (y_t - \bar{y})(y_{t-\tau} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2}, \quad \tau=1, 2, \dots, \quad (14)$$

は漸近的に正規分布に従う。ただし \bar{y} は y_t の標本平均であり、 $\bar{y} = \sum_{t=1}^T y_t / T$ である。通常 $\rho(\tau)$ の標準誤差を

$$\hat{\sigma}(\hat{\rho}(\tau)) = \begin{cases} 1 / \sqrt{T} & \text{for } \tau=1 \\ \sqrt{(1 + 2\sum_{j=1}^{\tau-1} \hat{\rho}(j)^2) / T} & \text{for } \tau=2, 3, \dots \end{cases} \quad (15)$$

として計算する。これにより $\rho(\tau)=0$ なる仮説を検定するには

$$t_{\hat{\rho}(\tau)} = \frac{\hat{\rho}(\tau)}{\hat{\sigma}(\hat{\rho}(\tau))}$$

なる t 値を計算し、あらかじめ定められた有意水準の臨界値と比較すればよい。正規分布の両側検定の有意水準 5 パーセント [1 パーセント] の臨界値は 1.96 [2.58] で与えられる。故に $|t_{\hat{\rho}(\tau)}| \geq 1.96 [2.58]$ のときは $\rho(\tau)=0$ なる帰無仮説は有意水準 5 パーセント [1 パーセント] で棄却される。逆に $|t_{\hat{\rho}(\tau)}| < 1.96 [2.58]$ のときは $\rho(\tau)=0$ なる帰無仮説は棄却されない。

自己相関の検定のもう一つの方法は、個々の自己相関を検定するのではなく、 m 個の自己相関をまとめて $\rho(1)=\rho(2)=\dots=\rho(m)=0$ なる帰無仮説を同時に検定する方法である。これは、かばん検定として知られている。帰無仮説のもとで、

$$Q^* = T(T+2) \sum_{\tau=1}^m \hat{\rho}(\tau)^2 / (T-\tau)$$

漸近的に自由度 m の χ^2 分布に従う。そこで、有意水準 5 パーセントの場合には $Q^* > \chi_{m,0.05}^2$ のときに上記の仮説を棄却すればよい。ただし $\chi_{m,0.05}^2$ は自由度 m のときの 5 パーセント棄却域の臨界値であり、統計表より求めることができる。この検定は Ljung-Box 検定または修正 Box-Pierce 検定と呼ばれている。

かばん検定は個別の自己相関をいちいち検定しなくてよいので簡便であるが、どのように m を決めたらよいのかについては曖昧であり、検出力も個別の自己相関の検定に比べて劣る場合が多いという欠点をもつ。従って時系列モデルの作成においては、識別の段階では t 検定を用いるのが一般的である。ただし、診断の段階では t 検定の有効性が失われるので、かばん検定がしばしば用いられる。

3.3 偏自己相関の検定（ t 検定）

標本偏自己相関の計算には次のような逐次計算公式が使われる。

$$\hat{\phi}_{11} = \hat{\rho}(1),$$

$$\phi_{\tau\tau} = \frac{\hat{\rho}(\tau) - \sum_{j=1}^{\tau-1} \hat{\phi}_{\tau-1,j} \hat{\rho}(\tau-j)}{1 - \sum_{j=1}^{\tau-1} \hat{\phi}_{\tau-1,j} \hat{\rho}(j)} \quad \text{for } \tau=2, 3, \dots \quad (16)$$

ただし

$$\hat{\phi}_{\tau,j} = \hat{\phi}_{\tau-1,j} - \hat{\phi}_{\tau\tau} \hat{\phi}_{\tau-1,\tau-j} \quad \text{for } \tau=3, 4, \dots \text{ and for } j=1, 2, \dots, \tau-1$$

である。

もし真の偏自己相関 $\phi_{\tau\tau}$ が $\phi_{\tau\tau}=0$ であれば標本偏自己相関 $\hat{\phi}_{\tau\tau}$ は近似的に平均ゼロ、分散 $1/T$ の正規分布に従うことが知られている。故に $\phi_{\tau\tau}=0$ なる帰無仮説の検定にあたっては $t_{\hat{\phi}_{\tau\tau}} = \sqrt{T} \hat{\phi}_{\tau\tau}$ なる t 値を考えればよい。自己相関の場合と同様に $|t_{\hat{\phi}_{\tau\tau}}| \geq 1.96 [2.58]$ のとき、 $\phi_{\tau\tau}=0$ なる仮説は有意水準 5 パーセント [1 パーセント] で棄却される。

4. Box-Jenkins のモデル・ビルディング

Box-Jenkins 流の時系列モデル作成の基本理念は節約の原理 (principle of parsimony) に基づいている。これは、モデルは簡単な方 (すなわち次数 p, q が低い方) が好ましいという考え方で、節約とはパラメータの数 p, q をなるべく小さくするというを意味する。

Box-Jenkins は以下のようなモデル・ビルディングの方法を提唱している。

Step 1 識別 (identification) : 標本自己相関や標本偏自己相関を使い、 t 検定によりモデルの次数 p, q を選択する。

Step 2 推定 (estimation) : モデルのパラメータを推定し、残差を計算する。

Step 3 診断 (diagnostic checking) : かばん検定を使って、残差がホワイト・ノイズであるという帰無仮説を検定する。

Step 4 Step 3 の結果、残差がホワイト・ノイズであるという仮説が棄却されたら、Step 1 へ戻り、モデルを再検討する。仮説が棄却されないなら Step 5 へ。

Step 5 モデルを予測・制御などに使う。

1 つの応用例に際し Box-Jenkins のモデル選択の手続きが複数の定式化を導き、その各々がモデルの診断基準を満たすこともある。その場合 AIC (Akaike information criterion)

$$AIC = \ln \hat{\sigma}^2 + 2(p+q) / T \quad (17)$$

や SBIC (Schwarz Bayesian information criterion)

$$SBIC = \ln \hat{\sigma}^2 + 2(p+q) \ln(T) / T \quad (18)$$

等の情報量基準に基づいてモデルを選択する方法がある。AIC [SBIC] をモデル選択に利用するには、あらかじめ適当と思われるいくつかの次数 p, q の組み合わせ全てについてモデルを推定し、それぞれについて AIC [SBIC] を計算して、最小の AIC [SBIC] を与えるモデルを正しいモ

デルとして選択する。

5. 低次元モデルの生成・識別の例

本節では TSP を使って、これまでに取り上げてきた低次元の ARIMA (p, d, q) ($0 \leq p, q, 2, 0 \leq d \leq 1$) モデルをいくつか実際に生成し、識別してみる。ファイル名とその内容は

- arma1. tsp AR(p) 過程の生成と識別
- arma2. tsp MA(q) 過程の生成と識別
- arma3. tsp ARMA(p, q) 過程の生成と識別
- arma4. tsp ARIMA($p, 1, q$) 過程の生成と識別

である。arma1. tsp の出力である arma1. out を以下に示す。

[arma1. out]

```

1  options crt; freq n;
3  set nsamp=1000; set maxlag=2;
5  set nsamp 1 =nsamp+maxlag; set ini=maxlag+1;
7  smpl 1 nsamp 1; random e; dot 1-4; y.=0; enddot;
12 smpl ini nsamp 1; y1=.8*y1(-1)+e; y2=-.8*y2(-1)+e;
15   y3=.4*y3(-1)+.5*y3(-2)+e; y4=.4*y4(-1)-.5*y4(-2)+e;
17 dot 1-4; bjidnt(NOPLOT, NOPLTRAW) y.; enddot;
    
```

Current sample : 1 to 1002
 Current sample : 3 to 1002
 NOTE : Dynamic GENR for Y1
 NOTE : Dynamic GENR for Y2
 NOTE : Dynamic GENR for Y3
 NOTE : Dynamic GENR for Y4

Box-Jenkins procedures
 Procedure BJIDENT

OPTIONS FOR THIS ROUTINE

IAC = FALSE	NDIFF = 0	NLAG = 20
NLAGP = 10	NSDIFF = 0	NSPAN = 0
PLOT = FALSE	PLOTAC = TRUE	PLTRAW = FALSE

Autocorrelations

Series (1-B)⁰(1-B⁰)⁰ Y1

Mean=0.13880192

Standard Error=1.6889835

	Lags					
Autocorrelations		0.810	0.670	0.558	0.454	0.360
Standard Errors	1 - 5	0.316E-01	0.481E-01	0.567E-01	0.619E-01	0.652E-01
Q-statistics		658.	0.111E+04	0.142E+04	0.163E+04	0.176E+04
Autocorrelations		0.279	0.213	0.167	0.117	0.987E-01
Standard Errors	6 -10	0.671E-01	0.683E-01	0.689E-01	0.693E-01	0.695E-01

Q-statistics		0.184E+04	0.188E+04	0.191E+04	0.193E+04	0.194E+04
Autocorrelations		0.578E-01	0.228E-01-0.	154E-01-0.	288E-01-0.	359E-01
Standard Errors	11-15	0.697E-01	0.697E-01	0.697E-01	0.697E-01	0.697E-01
Q-statistics		0.194E+04	0.194E+04	0.194E+04	0.194E+04	0.194E+04
Autocorrelations		-0.450E-01	-0.519E-01	-0.527E-01	-0.613E-01	-0.646E-01
Standard Errors	16-20	0.698E-01	0.698E-01	0.698E-01	0.699E-01	0.699E-01
Q-statistics		0.194E+04	0.195E+04	0.195E+04	0.195E+04	0.196E+04

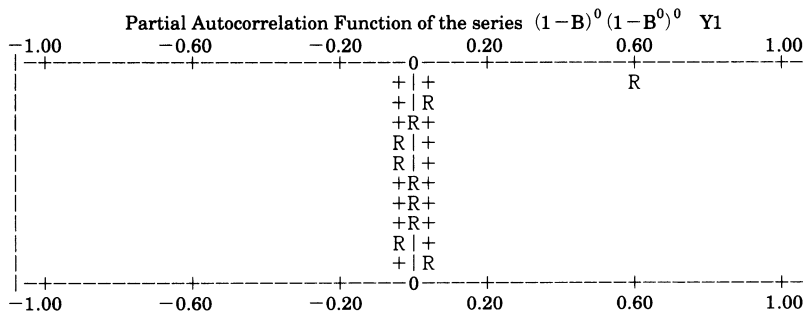
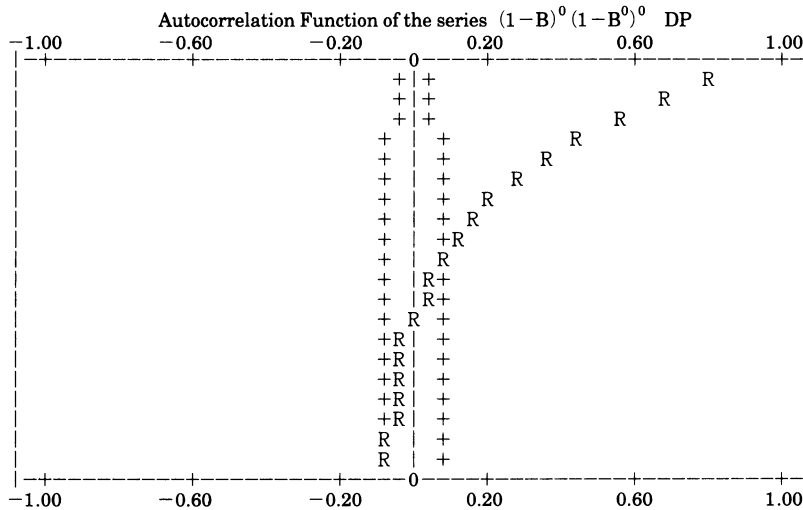
Partial Autocorrelations

Series (1-B)⁰ (1-B⁰)⁰ Y1

Standard Error of Autocorrelations=0.31622777E-01

Lags

Partial Autocorr	1 - 5	0.810	0.406E-01	0.111E-01	-0.270E-01	-0.330E-01
Partial Autocorr	6 - 10	-0.181E-01	-0.947E-02	0.164E-01	-0.375E-01	0.551E-01
Partial Autocorr	11-15	0.316E-01	0.139	1.69	0.900	-0.924E-01
Partial Autocorr	16-20	-0.731	-3.01	-2.44	-2.33	-2.89
Partial Autocorr	21-10					



出力ファイルは、プログラム(コマンド)部分と実行部分に分れる。

全4ケースとも標本の大きさは1000になるように設定してある。

このために初期値部分は最大ラグ2期分だけ余分に標本を生成した。4ケースは

ケース 1 $y_t = .8y_{t-1} + \varepsilon_t$

ケース 2 $y_t = -.8y_{t-1} + \varepsilon_t$

$$\text{ケース 3} \quad y_t = .4y_{t-1} + .5y_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$\text{ケース 4} \quad y_t = .8y_{t-1} - .5y_{t-2} + \varepsilon_t$$

となっており、いずれのケースも同一の $\text{iid}N(0, 1)$ の母集団から採った $\{\varepsilon_t\}$ を使っている。プログラムでは、各ケースの番号を「y」につけて、例えば第3ケースの y_t は「y3」にしてある。「dot」コマンドはこのように似た作業を繰り返させるのに便利である。出力は、ここでは第1ケースのみにして他は省略している。TSP では識別のコマンドは `bjident` である。第17~19 ステートメントの `dot` コマンドの中で4ケース行なっている。まず `bjident` コマンドのオプションが（ここでは全て既定値）プリントされて、次に数値でコレログラムと標本偏自己相関が各々の漸近標準誤差の推定値と共に出力される。この数値情報よりも、すぐ後に出力されている2つのグラフの方が有用である。標本自己相関はきれいに単調減衰しているが、標本偏自己相関は ϕ_{11} を除いて全てほとんどゼロである。この2点を3.1節の表に照らして、第1のケースはAR(1)であることが分かる。

他のARのケース、MA、ARMAそしてARIMAについては各ファイルを実行して、確かめてほしい。実は上記のAR(1)の例は現実にはほとんど遭遇しないような、識別がうまくいっている例である。ARIMAモデルのケースではあらかじめ $d=1$ であることが分かっているので、`bjident` オプションの「`ndif`」を1に指定して、最大 $d=1$ の階差をとった変数の識別のための情報を出力させている。問題は与えられた変数の階差をどれだけとれば、定常なARMAモデルの分析に持ち込めるか、である。

階差は取り過ぎてはいけない。循環 `cycle` のない系列に誤って階差を取ることで一見循環があるように見えてくる場合がある。これはSlutsky効果 (Maddala (1992, p. 533)) と呼ばれる。例えば非定常な $y_t = \phi_0 + \phi_1 t + \phi_2 t^2 + u_t$ を考えると、 $\Delta^2 y_t = 2\phi_2 + \Delta^2 u_t$ となるから、 $\Delta^3 y_t = \Delta^3 u_t (= \bar{u}_t)$ であるが、 \bar{u}_t は反転不能なMA(3)になっており、循環をもつ。このような状況はまた過度の階差 `overdifferencing` とも呼ばれている。

6. 経済データのモデリング例: インフレ率

ファイル `pgdp.out` は、データ・ファイル `gdp.dat` から85年基準季節調整済実質GDPの四半期データを、データ・ファイル `gdpn.dat` から季節調整済名目GDPの四半期データを、1955年第2四半期から1995年第2四半期まで読み込んでいる。これらのデータからGDPデフレーターを作成し、インフレ率 dp をGDPデフレターの対数値の階差として定義する(9行目)。

次に dp の記述統計量、プロット、標本自己相関、標本偏自己相関を `msd` と `plot, bjident` で各々計算した。 dp の標本自己相関をみると5パーセント水準で3次まで有意であり、また幾何級数的に減衰しているようにもみえる。標本偏自己相関は1次のみが有意であるが、2次で切断されているようにもみえる。以上の結果よりモデルの候補としてAR(1), AR(2), ARMA(1, 3)を考える。まずARMA(1, 3)をあてはめて推定してみると2次と3次のMA項の係数が有意ではない、これはあてはめ過剰である。そこで新たなモデルの候補としてARMA(1, 2)を推定したところ、これも2次のMA項が有意ではないので、候補としてARMA(1, 1)を考え

る。

モデル ARMA (1, 1), AR (2), AR (1) を推定したところ、いずれの係数も 5 パーセント水準で有意であった。AR (1) 以外は Ljung-Box 統計量 $Q(20)$ は有意ではないので、AR (2), ARMA (1, 1) の残差はホワイト・ノイズであるとみなせる。これにより AR (1) はモデルの候補から除外される。次に、それぞれのモデルについて AIC と SBIC を計算したところ、2 つとも ARMA (1, 1) のとき最も小さい値を取っている。以上の診断結果より、ARMA (1, 1) モデルが選択される。

ARMA (1, 1) モデルを使って 1994 年第 1 四半期から第 4 四半期までの予測 `bjfrst` を行なう。1 期先予測を行なった結果が最後にプロットされている。ただし、TSP は 1 期先予測の結果をこのプロットのように出力するわけではないので注意。4 つの予測値と実現値を比較したところ、どれも 95 パーセント予測信頼区間に入っている。モデルとしてさほど悪くはない。

pgdp. out

```

1  options limwarn=10;options crt;freq q;
4  smpl 55: 2 95: 2;
5  load(file='gdp. dat') gdp;?real GDP
6  load(file='gdpn. dat') gdpn;?nominal GDP
7  lpgdp = log(gdpn / gdp);
8  smpl 70: 1 95: 2;
9  dp = lpgdp-lpgdp(-1);
10 smpl 75: 1 94: 4;msd dp;plot dp;
13 smpl 75: 1 93: 4;
14 ????? Identification
14  bjident(NOPLOT, NOPLTRAW) dp;
15 ????? Estimation and Diagnostic Checking
15  bjest(nar=1, nma=3, NOPLOT, NOCUMPLO, NOSTART, maxit=50) dp;
16  ?bjest(nar=1, nma=2, NOPLOT, NOCUMPLO, NOSTART, maxit=50) dp;
16  bjest(nar=1, nma=1, NOPLOT, NOCUMPLO, NOSTART, maxit=50) dp;
17  set aic11 = log(@s**2) + 2*(1+1)/@nob;
18  set sbic11 = log(@s**2) + 2*(1+1)*log(@nob)/@nob;
19  set phi1=@coef(1);set theta1=@coef(2);set s11=@s;
22  bjest(nar=2, nma=0, NOPLOT, NOCUMPLO, NOSTART, maxit=50) dp;
23  set aic20 = log(@s**2) + 2*(2+0)/@nob;
24  set sbic20 = log(@s**2) + 2*(2+0)*log(@nob)/@nob;
25  bjest(nar=1, nma=0, NOPLOT, NOCUMPLO, NOSTART, maxit=50) dp;
26  set aic10 = log(@s**2) + 2*(1+0)/@nob;
27  set sbic10 = log(@s**2) + 2*(1+0)*log(@nob)/@nob;
28  print aic11 aic20 aic10;
29  print sbic11 sbic20 sbic10;
30  ????? Forecasting
30  smpl 93: 4 94: 4;
31  bjfrst(nar=1, nma=1, nhoriz=1, orgbeg=93:4, orgend=94:3, plot) dp
31  s s11
31  phi(1) phi1 theta(1) theta1;
32  stop;

```

EXECUTION

Current sample: 1955: 2 to 1995: 2

Current sample : 1970 : 1 to 1995 : 2

Current sample : 1975 : 1 to 1994 : 4

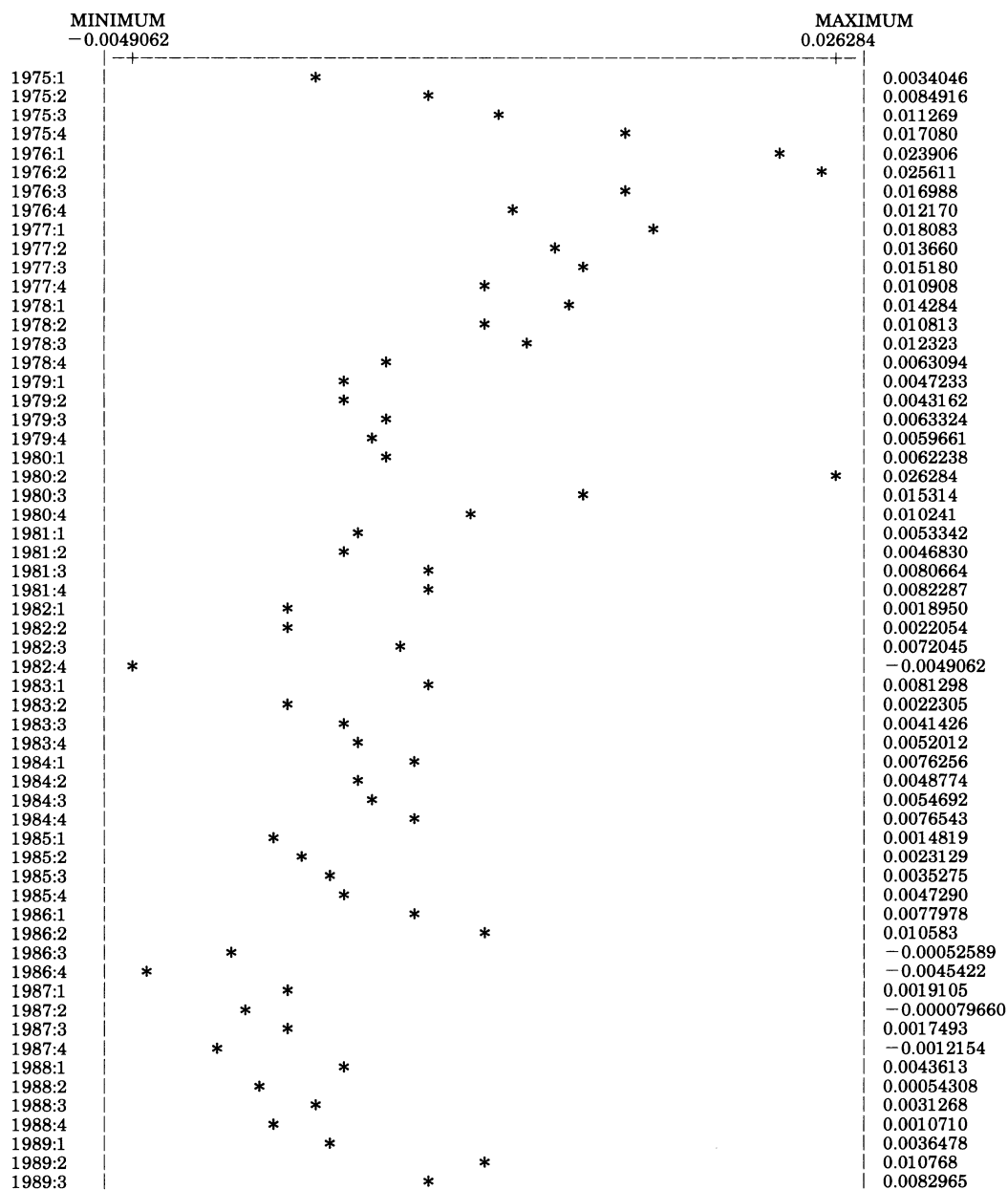
Univariate statistics

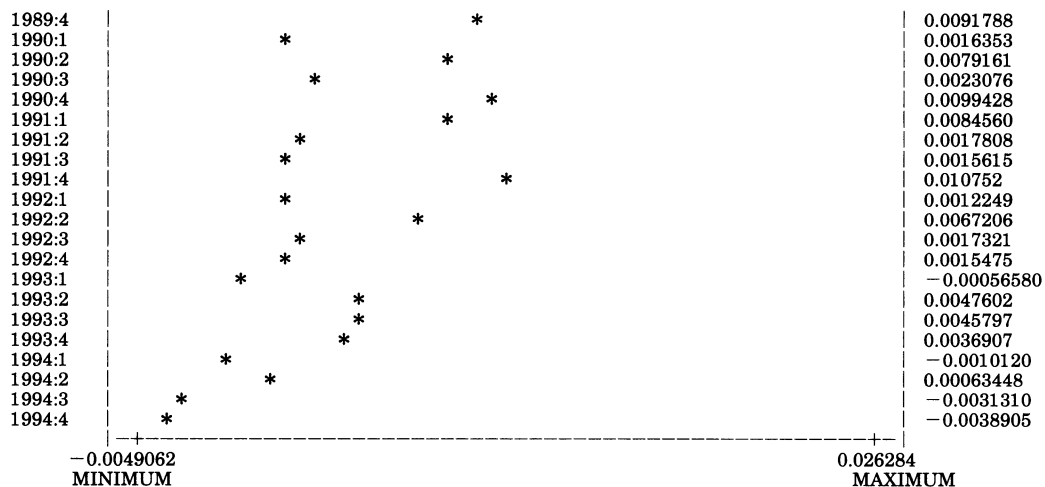
Number of Observations : 80

	Mean	Std Dev	Minimum	Maximum
DP	0.0063411	0.0062838	-0.0049062	0.026284
	Sum	Variance	Skewness	Kurtosis
DP	0.50729	0.000039486	1.02752	1.54413

TIME SERIES PLOT

DP PLOTTED WITH *





Current sample : 1975 : 1 to 1993 : 4

Box-Jenkins procedures

Procedure BJIDENT

OPTIONS FOR THIS ROUTINE

IAC = FALSE NDIFF = 0 NLAG = 20
 NLAGP = 10 NSDIFF = 0 NSPAN = 4
 PLOT = FALSE PLOTAC = TRUE PLTRAW = FALSE

Autocorrelations

Series (1-B)⁰ (1-B⁰)⁰ DP
 Mean = 0.67721770E-02
 Standard Error = 0.61364440E-02

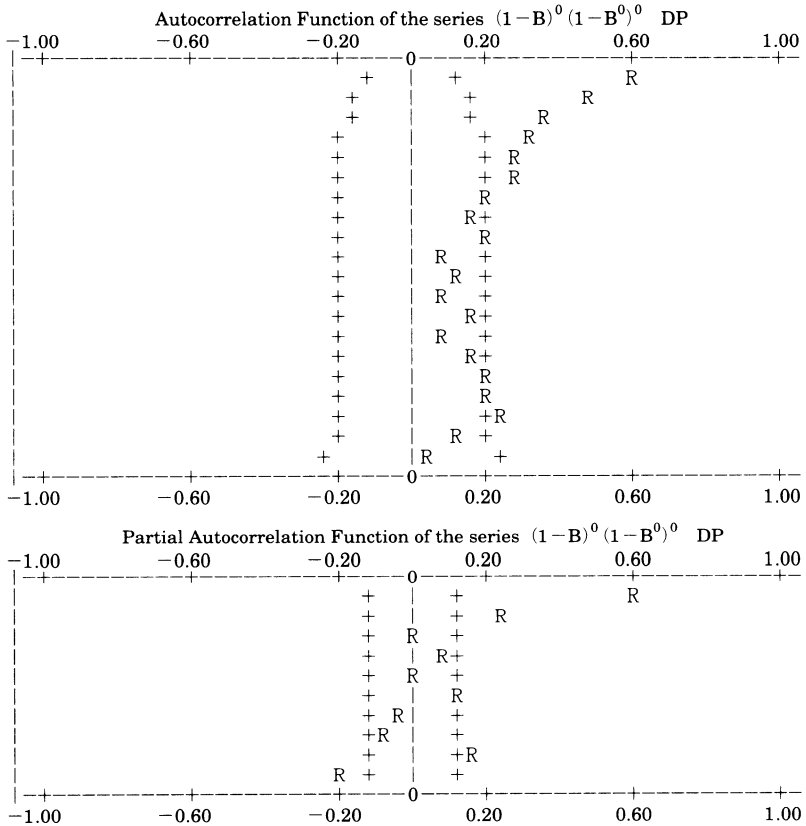
	Lags				
Autocorrelations		0.597	0.500	0.365	0.263
Standard Errors	1 - 5	0.115	0.150	0.171	0.181
Q-statistics		28.2	48.2	59.0	67.7
Autocorrelations		0.282	0.212	0.145	0.216
Standard Errors	6 - 10	0.193	0.198	0.201	0.203
Q-statistics		80.2	84.1	85.9	90.0
Autocorrelations		0.109	0.830E-01	0.154	0.939E-01
Standard Errors	11 - 15	0.206	0.207	0.207	0.209
Q-statistics		91.6	92.2	94.4	95.3
Autocorrelations		0.215	0.209	0.239	0.106
Standard Errors	16 - 20	0.211	0.214	0.217	0.220
Q-statistics		103.	107.	113.	114.

Partial Autocorrelations

Series (1-B)⁰ (1-B⁰)⁰ DP
 Standard Error of Autocorrelations = 0.11470787

	Lags				
Partial Autocorr	1 - 5	0.597	0.223	0.682E-03	0.732E-01
Partial Autocorr	6 - 10	0.104	-0.375E-01	-0.744E-01	0.179
Partial Autocorr	11 - 15	0.115	0.677E-02	0.614E-02	0.340E-02

Partial Autocorr 16-20 0.113E-01 0.171E-01 0.239E-01 0.256E-01 0.170E-01
 Partial Autocorr 21-10



Box-Jenkins procedures

Procedure BJEST

Working space used : 1789

STARTING VALUES

VALUE	PHI 1 0.00000	THETA 1 0.00000	THETA 2 0.00000	THETA 3 0.00000
F= -249.22	FNEW= -289.83	ISQZ= 0	STEP= 1.0000	CRIT= 50.612
F= -289.83	FNEW= -292.67	ISQZ= 1	STEP= 0.25000	CRIT= 9.1533
F= -292.67	FNEW= -294.48	ISQZ= 1	STEP= 0.25000	CRIT= 6.2635
F= -294.48	FNEW= -295.02	ISQZ= 0	STEP= 1.0000	CRIT= 4.0353
F= -295.02	FNEW= -297.74	ISQZ= 1	STEP= 0.75000	CRIT= 8.2939
F= -297.74	FNEW= -299.05	ISQZ= 0	STEP= 1.0000	CRIT= 2.3692
F= -299.05	FNEW= -299.16	ISQZ= 0	STEP= 1.0000	CRIT= 0.17826
F= -299.16	FNEW= -299.16	ISQZ= 0	STEP= 1.0000	CRIT= 0.13764E-02
F= -299.16	FNEW= -299.16	ISQZ= 0	STEP= 1.0000	CRIT= 0.26931E-04

CONVERGENCE ACHIEVED AFTER 9 ITERATIONS
 21 FUNCTION EVALUATIONS.

Results of Box-Jenkins Estimation

Dependent variable : DP

Current sample : 1975 : 1 to 1993 : 4

Number of observations : 76

Mean of dependent variable = .677218E-02

Std. dev. of dependent var. = .613644E-02

Sum of squared residuals = .169547E-02

Variance of residuals = .235482E-04

Std. error of regression = .485265E-02

R-squared = .402071

Adjusted R-squared = .377157

Durbin-Watson statistic = 1.96931

F-statistic (zero slopes) = 15.9775

Log of likelihood function = 299.161

Parameter	Estimate	Standard Error	t-statistic
PHI 1	.992434	.974868E-02	101.802
THETA 1	.560432	.115831	4.83838
THETA 2	.067616	.132829	.509046
THETA 3	.189129	.114991	1.64473

Standard Errors computed from quadratic form of analytic first derivatives (Gauss)

Autocorrelations of the Residuals

	1	2	3	4	5
Autocorr	0.0052599	0.017125	0.029974	-0.0049735	-0.081023
Q-stat	0.0021867	0.025680	0.098639	0.10068	0.64879
P-value	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.42055
	6	7	8	9	10
Autocorr	0.10015	-0.052426	-0.14509	0.13738	-0.18321
Q-stat	1.49819	1.73432	3.56946	5.23929	8.25406
P-value	0.47279	0.62933	0.46740	0.38738	0.22008
	11	12	13	14	15
Autocorr	-0.048881	-0.078683	0.068720	-0.11809	0.042986
Q-stat	8.47197	9.04541	9.48977	10.82315	11.00271
P-value	0.29282	0.33848	0.39334	0.37146	0.44304
	16	17	18	19	20
Autocorr	0.11398	0.041529	0.19456	-0.010116	-0.091284
Q-stat	12.28622	12.45950	16.32839	16.33904	17.22112
P-value	0.42298	0.49037	0.29373	0.35988	0.37143

Box-Jenkins procedures

Procedure BJEST

Working space used : 1413

STARTING VALUES

VALUE	PHI 1	THETA 1		
	0.00000	0.00000		
F= -249.22	FNEW= -291.83	ISQZ= 0	STEP= 1.0000	CRIT= 49.766
F= -291.83	FNEW= -296.38	ISQZ= 0	STEP= 1.0000	CRIT= 7.1875
F= -296.38	FNEW= -296.65	ISQZ= 0	STEP= 1.0000	CRIT= 0.39734
F= -296.65	FNEW= -296.71	ISQZ= 0	STEP= 1.0000	CRIT= 0.65999E-01
F= -296.71	FNEW= -296.72	ISQZ= 0	STEP= 1.0000	CRIT= 0.18906E-01
F= -296.72	FNEW= -296.73	ISQZ= 0	STEP= 1.0000	CRIT= 0.64764E-02

F= -296.73 FNEW= -296.73 ISQZ= 0 STEP= 1.0000 CRIT= 0.24087E-02
 F= -296.73 FNEW= -296.73 ISQZ= 0 STEP= 1.0000 CRIT= 0.93792E-03
 F= -296.73 FNEW= -296.73 ISQZ= 0 STEP= 1.0000 CRIT= 0.37531E-03
 F= -296.73 FNEW= -296.73 ISQZ= 0 STEP= 1.0000 CRIT= 0.15271E-03
 F= -296.73 FNEW= -296.73 ISQZ= 0 STEP= 1.0000 CRIT= 0.62790E-04
 F= -296.73 FNEW= -296.73 ISQZ= 0 STEP= 1.0000 CRIT= 0.25989E-04
 F= -296.73 FNEW= -296.73 ISQZ= 0 STEP= 1.0000 CRIT= 0.10803E-04

CONVERGENCE ACHIEVED AFTER 13 ITERATIONS

26 FUNCTION EVALUATIONS.

Results of Box-Jenkins Estimation

Dependent variable : DP

Current sample : 1975 : 1 to 1993 : 4

Number of observations : 76

Mean of dependent variable = .677218E-02

Std. dev. of dependent var. = .613644E-02

Sum of squared residuals = .180738E-02

Variance of residuals = .244241E-04

Std. error of regression = .494207E-02

R-squared = .381685

Adjusted R-squared = .373329

Durbin-Watson statistic = 1.88311

F-statistic (zero slopes) = 41.6316

Log of likelihood function = 296.732

Parameter	Estimate	Standard Error	t-statistic
PHI 1	.959157	.033730	28.4365
THETA 1	.515781	.105645	4.88219

Standard Errors computed from quadratic form of analytic first derivatives (Gauss)

	Autocorrelations of the Residuals				
	1	2	3	4	5
Autocorr	0.045502	0.0046828	-0.14658	-0.070577	-0.10127
Q-stat	0.16364	0.16540	1.91014	2.32025	3.17659
P-value	0.00000	0.00000	0.16695	0.31345	0.36519
	6	7	8	9	10
Autocorr	0.058072	-0.033442	-0.11474	0.12792	-0.17721
Q-stat	3.46218	3.55827	4.70594	6.15370	8.97416
P-value	0.48365	0.61459	0.58204	0.52192	0.34448
	11	12	13	14	15
Autocorr	-0.029144	-0.10357	0.056827	-0.11922	0.028586
Q-stat	9.05162	10.04512	10.34898	11.70806	11.78747
P-value	0.43252	0.43654	0.49930	0.46940	0.54514
	16	17	18	19	20
Autocorr	0.12533	0.099483	0.22710	-0.028212	-0.096781
Q-stat	13.33936	14.33374	19.60477	19.68754	20.67906
P-value	0.49999	0.50038	0.23855	0.29052	0.29591

Box-Jenkins procedures

Procedure BJEST

Working space used : 1019

STARTING VALUES

VALUE	PHI 1 0.00000	PHI 2 0.00000			
F= -249.22	FNEW= -295.83	ISQZ= 0	STEP= 1.0000	CRIT= 51.972	
F= -295.83	FNEW= -295.84	ISQZ= 0	STEP= 1.0000	CRIT= 0.23513E-01	
F= -295.84	FNEW= -295.84	ISQZ= 0	STEP= 1.0000	CRIT= 0.19920E-04	
F= -295.84	FNEW= -295.84	ISQZ= 0	STEP= 1.0000	CRIT= 0.17357E-07	

CONVERGENCE ACHIEVED AFTER 4 ITERATIONS
8 FUNCTION EVALUATIONS.

Results of Box-Jenkins Estimation

Dependent variable : DP

Current sample : 1975 : 1 to 1993 : 4

Number of observations : 76

Mean of dependent variable = .677218E-02

Std. dev. of dependent var. = .613644E-02

Sum of squared residuals = .185016E-02

Variance of residuals = .250022E-04

Std. error of regression = .500022E-02

R-squared = .390821

Adjusted R-squared = .382589

Durbin-Watson statistic = 2.03493

F-statistic (zero slopes) = 38.9578

Log of likelihood function = 295.843

Standard

Parameter	Estimate	Error	t-statistic
PHI 1	.559117	.110242	5.07174
PHI 2	.319511	.109628	2.91451

Standard Errors computed from quadratic form of analytic first derivatives (Gauss)

Autocorrelations of the Residuals

	1	2	3	4	5
Autocorr	-0.046792	-0.12243	-0.10650	-0.027909	-0.057638
Q-stat	0.17306	1.37382	2.29482	2.35895	2.63633
P-value	0.00000	0.00000	0.12981	0.30744	0.45116
	6	7	8	9	10
Autocorr	0.10211	-0.031820	-0.098062	0.18023	-0.15012
Q-stat	3.51932	3.60631	4.44462	7.31869	9.34273
P-value	0.47495	0.60737	0.61674	0.39647	0.31421
	11	12	13	14	15
Autocorr	-0.026620	-0.051598	0.087528	-0.13262	-0.0023373
Q-stat	9.40736	9.65396	10.37484	12.05660	12.05713
P-value	0.40055	0.47136	0.49702	0.44114	0.52296
	16	17	18	19	20
Autocorr	0.088151	0.057580	0.21885	-0.027068	-0.12144
Q-stat	12.82487	13.15799	18.05332	18.12952	19.69065
P-value	0.54036	0.59010	0.32078	0.38071	0.35050

Box-Jenkins procedures

Procedure BJEST

Working space used : 837

STARTING VALUES

PHI 1
 VALUE 0.00000
 F= -249.22 FNEW= -291.83 ISQZ= 0 STEP= 1.0000 CRIT= 50.438
 F= -291.83 FNEW= -291.83 ISQZ= 0 STEP= 1.0000 CRIT= 0.22196E-03
 F= -291.83 FNEW= -291.83 ISQZ= 0 STEP= 1.0000 CRIT= 0.31203E-09
 CONVERGENCE ACHIEVED AFTER 3 ITERATIONS
 6 FUNCTION EVALUATIONS.

Results of Box-Jenkins Estimation

Dependent variable : DP

Current sample : 1975 : 1 to 1993 : 4

Number of observations : 76

Mean of dependent variable = .677218E-02
 Std. dev. of dependent var. = .613644E-02
 Sum of squared residuals = .205600E-02
 Variance of residuals = .274133E-04
 Std. error of regression = .523577E-02
 R-squared = .361043
 Adjusted R-squared = .361043
 Durbin-Watson statistic = 2.51174
 Log of likelihood function = 291.834

Standard

Parameter	Estimate	Error	t-statistic
PHI 1	.821937	.065821	12.4874

Standard Errors computed from quadratic form of analytic first derivatives (Gauss)

	Autocorrelations of the Residuals				
	1	2	3	4	5
Autocorr	-0.32885	0.073551	-0.090733	0.060972	-0.074951
Q-stat	8.54765	8.98101	9.64954	9.95562	10.42466
P-value	0.00000	0.0027281	0.0080284	0.018947	0.033851
	6	7	8	9	10
Autocorr	0.11658	-0.0051462	-0.13501	0.25275	-0.20804
Q-stat	11.57552	11.57780	13.16682	18.81916	22.70666
P-value	0.041091	0.072078	0.068147	0.015857	0.0068898
	11	12	13	14	15
Autocorr	0.085267	-0.10433	0.15127	-0.14564	0.025750
Q-stat	23.36973	24.37789	26.53110	28.55903	28.62346
P-value	0.0094611	0.011231	0.0090211	0.0075561	0.011746
	16	17	18	19	20
Autocorr	0.079575	-0.036419	0.21043	-0.076815	-0.0095600
Q-stat	29.24908	29.38234	33.90834	34.52199	34.53167
P-value	0.014937	0.021482	0.0086278	0.010850	0.015894
	AIC11	AIC20	AIC10		
Value	-10.56731	-10.54391	-10.47817		
	SBIC11	SBIC20	SBIC10		
Value	-10.39201	-10.36861	-10.39052		

Current sample : 1993 : 4 to 1994 : 4

Box-Jenkins procedures

Procedure BJFRCST

OPTIONS FOR THIS ROUTINE

CONBOUND = 0.95000 CONSTANT = FALSE NAR = 1
 NBACK = 100 NDIFF = 0 NHORIZ = 1
 NLAG = 20 NMA = 1 NSAR = 0
 NSDIFF = 0 NSMA = 0 NSPAN = 4
 ORGBEG = 7975 ORGEND = 7978 PLOT = TRUE
 PRINT = TRUE RETRIEVE = TRUE

TIME SERIES : DP

STANDARD ERROR OF THE DISTURBANCE = 0.0049421

PHI(B)

1 - 0.95916 B

THETA(B)

1 - 0.51578 B

PHI*(B)

1 - 0.95916 B

THETA*(B)

1 - 0.51578 B

FORECAST STANDARD ERRORS AND PSI WEIGHTS

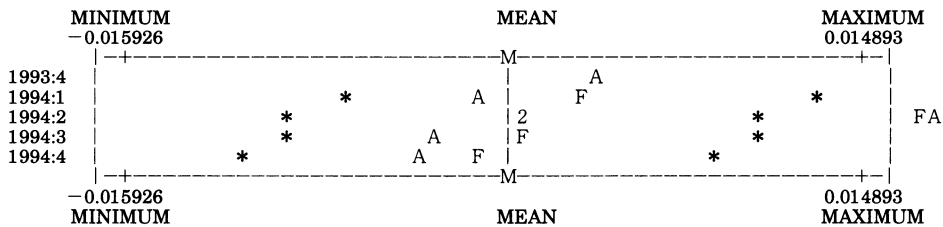
	STD ERR	PSI
1	0.0049421	0.44338

Forecasts and 95% Confidence Bounds (Origin = 1993 : 4)

	Lowr Bnd	Forecast	Uppr Bnd	Actual	Error
1993 : 4	0.0036907	0.0036907	0.0036907	0.0036907	0.00000
1994 : 1	-0.0064477	0.0032385	0.012925	-0.0010120	-0.0042506
1994 : 2	-0.0090259	0.00066042	0.010347	0.00063448	-0.000025939
1994 : 3	-0.0090124	0.00067385	0.010360	-0.0031310	-0.0038048
1994 : 4	-0.010758	-0.0010716	0.0086146	-0.0038905	-0.0028189

The Series is plotted with "A"

The Forecast is plotted with "F"



7. 単位根と共和分

7.1 見せかけの相関による回帰 Spurious Regressions

単位根がある2変数について回帰分析を行なうと見せかけの相関による回帰を検出してしま¹⁾う場合がある。この場合特徴的なのは、適当に高い R^2 と低いDW値である。

1) C. W. J. Granger and P. Newbold (1974), "Spurious regressions in econometrics", *Journal of Econometrics*, 2, 111-120. P. C. B. Pillips (1986), "Underatanding spurious regressions", *Journal of Econometrics*, 33, 311-340

変数間で共和分関係があるときは、単位根があっても、見せかけの相関による回帰とならない。

$y_{1t} \sim I(1)$, $y_{2t} \sim I(1)$ のとき

$w_t = y_{1t} - \alpha y_{2t} \sim I(0)$ が存在するならば

y_{1t} と y_{2t} は共和分関係にある。

もし変数 X と Y が各々単位根をもつならば ($X \sim I(1)$, $Y \sim I(1)$), 次に X と Y が共和分関係にあるかどうか調べる。もし共和分関係にあるならば、誤差修正モデル (ECM) を使って X と Y の関係を記述できる。もし共和分関係にないならば、回帰モデルで階差をとった変数 ΔX と ΔY の関係を記述できる。

7.2 単位根検定

経済時系列データ y_t が単位根をもつための条件、すなわち y_t が $I(1)$ であるための条件は、

$$\Delta y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$$

において、 $\rho = 0$ となることである。つまり $H_0: \rho = 0$ を検定することで単位根の検定を行なえる。この ρ の t 値は通常の t 分布に従わず、Dickey--Fuller 統計量に従う。

H_0 : 単位根がある $\Leftrightarrow H_0: \rho = 0$

H_1 : y_t は定常 $\Leftrightarrow H_1: \rho < 0$

7.2.1 Augmented Dickey-Fuller 検定

よく使われる検定方法に Augmented Dickey--Fuller 検定がある。

$$\Delta y_t = \alpha + \mu t + \rho y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \beta_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t$$

ここで、“ t ” 項はトレンド定常への配慮のためであり、 Δy_{t-i} 's が入るのは y_t が高階の AR 過程に従うことへの配慮である。

まず上の式のラグ次数をどのように選択するかという問題がある。Campbell and Perron (1991) では、階差をとった変数の自己相関と偏自己相関から最大ラグ次数を設定し、1) 逐次最大ラグの項の t 値を検定 (これは t 分布が使える) することにより、有意でないラグの項を落していくという方法、2) AIC 等の情報量基準により選択する方法、を提案している。

つぎに ADF 検定の低い検出力を補うために Dolado, Jenkinson, and Sosvilla-Rivero (1990) は次のような検定方法を提案している。彼らの方法は、もし当該変数の階差系列にドリフト項の存在が想定されるならば、定数項とトレンド項の両方を含んだ回帰により、ADF 検定を行なう。そのテストで単位根が棄却されれば、検定はそこで終了する。棄却されない場合には、帰無仮説の下でトレンド項の有意性を検定し、有意の時には正規分布でもって単位根を検定する。トレンド項が有意でない時には、トレンド項を除いた ADF 検定を考える。そのテストで単位根が棄却

されなければ、今度は定数項の有意性を検定する。定数項が有意ならば、また正規分布を用いた検定が可能となる。定数項が有意でない時には、定数項とトレンド項のない ADF 検定を行なう。

前節の例で使用したデータのうち季調済実質 GDP のデータを使って単位根検定を行なっているのがファイル `gdp2. tsp` である。出力結果 `gdp2. out` について説明する。TSP で ADF 検定を行なうには `coint` コマンドを使う。TSP で最大ラグ次数を設定するには `maxlags` オプションを使う。まず `lgdp` について最大ラグを 4 として上のモデルを推定する（10行目）。逐次最大ラグの項の t 値を検定する ($t(dy(-p))$) といずれも 5 パーセント水準で有意ではない。ラグ次数をゼロとしたモデルの結果をみると単位根の仮説は棄却されない (Test Stat, P-value)。そこでトレンド項の t 値 ($t(\text{Trend})$) をみるとこれも有意ではないので、11行目でトレンド項を除いた ADF 検定行なっている。ここでも単位根の仮説は棄却されず、定数項の t 値 ($t(\text{Const})$) も有意ではないので、12行目で定数項とトレンド項のない ADF 検定を行なっている。ここでも単位根の仮説は棄却されないので、`lgdp` には単位根が存在すると判断される。AIC によりラグ次数を選択するとゼロであり、同様の手順で（13, 14行目）`lgdp` には単位根が存在すると判断される。²⁾

次に階差をとった `dlgdp` について単位根検定を行なっているのが15～19行目である。 t 検定ではラグ次数ゼロ、AIC でもラグ次数ゼロが選択されるが、いずれの場合も単位根が存在するという帰無仮説は棄却されるので、Dolado, Jenkinson, and Sosvilla-Rivero (1990) の手法では検定はここで終了し、16～19行目は必要ない。

[`gdp2. out`]

```

1  options limwarn=0 ; options crt ; freq q ;
4  smpl 55 : 2 95 : 2 ;
5  load(file='gdp. dat') gdp ;
6  lgdp = log(gdp) ;
7  smpl 73 : 1 95 : 2 ;
8  dlgdp = log(gdp / gdp(-1)) ;
9  smpl 74 : 1 93 : 4 ;
10 coint(df, maxlags=4, const, trend, rule=aic2, NOWS, print) lgdp ;
11 coint(df, maxlags=0, const, notrend, NOWS) lgdp ;
12 coint(df, maxlags=0, noconst, notrend, NOWS) lgdp ;
13 coint(df, maxlags=2, minlags=2, const, notrend, NOWS) lgdp ;
14 coint(df, maxlags=2, minlags=2, const, notrend, NOWS) lgdp ;
15
15 coint(df, maxlags=4, const, trend, rule=aic2, NOWS, print) dlgdp ;
16 coint(df, maxlags=0, const, notrend, NOWS) dlgdp ;
17 coint(df, maxlags=0, noconst, notrend, NOWS) dlgdp ;
18 coint(df, maxlags=2, minlags=2, const, notrend, NOWS) dlgdp ;
19 coint(df, maxlags=2, minlags=2, const, notrend, NOWS) dlgdp ;

```

Current sample : 1955 : 2 to 1995 : 2

Current sample : 1973 : 1 to 1995 : 2

Current sample : 1974 : 1 to 1993 : 4

2) Pantura *et al.* (1994) の実験により、「AIC で選んだラグ次数 + 2」をラグ次数として単位根検定をしたほうが、検出力が高くなることが知られている。TSP の `coint` コマンドで `rule=aic2` とすれば自動的にこの結果を出力する。`gdp2. out` では結果は省略してあるが、この場合も同様の手順で `lgdp` には単位根が存在すると判断される。

OPTIONS FOR THIS ROUTINE

ALL	= FALSE	ALLORDER	= FALSE	COINT	= FALSE
CONST	= TRUE	DF	= TRUE	EG	= FALSE
JOH	= FALSE	MAXLAGS	= 4	MINLAGS	= 0
PP	= FALSE	PRINT	= TRUE	RULE	= AIC 2
SEAS	= FALSE	SEAST	= FALSE	SEASTSQ	= FALSE
SILENT	= FALSE	TERSE	= FALSE	TREND	= TRUE
TSQ	= FALSE	UNIT	= TRUE	WS	= FALSE

Unit root tests for LGDP

	Dickey-Fuller (tau) test				
Num lags	0	1	2	3	4
alpha	1.01004	1.02022	0.99363	0.96163	0.91979
TestStat	0.19602	0.36302	-0.10571	-0.60100	-1.18282
P-value	0.99575	0.99650	0.99299	0.97890	0.91397
Const	-0.11014	-0.23411	0.089917	0.47982	0.98976
t(Const)	-0.17539	-0.34326	0.12200	0.61448	1.19398
Trend	-0.00019562	-0.00030059	-0.000029505	0.00029542	0.00071729
t(Trend)	-0.38396	-0.53980	-0.048852	0.46070	1.05264
dy(- 1)	.	-0.061688	-0.039274	-0.027232	-0.023804
t(dy(- 1))	.	-0.48058	-0.30311	-0.21128	-0.18705
dy(- 2)	.	.	0.14134	0.16995	0.18493
t(dy(- 2))	.	.	1.14509	1.36889	1.50481
dy(- 3)	.	.	.	0.17652	0.21439
t(dy(- 3))	.	.	.	1.42844	1.72784
dy(- 4)	0.20819
t(dy(- 4))	1.67285
Num obs	75.00000	75.00000	75.00000	75.00000	75.00000
LogLike	268.37968	268.50146	269.19741	270.29027	271.80261
AIC	-7.07679	-7.05337	-7.04526	-7.04774	-7.06140
Var res	0.000047544	0.000048058	0.000047848	0.000047147	0.000045950

Unit root tests for LGDP

	Dickey-Fuller (tau) test
Num lags	0
alpha	0.99400
TestStat	-1.68438
P-value	0.43918
Const	0.084634
t(Const)	1.88444
Num obs	79.00000
LogLike	278.98679
AIC	-7.01232
Var res	0.000051435

Unit root tests for LGDP

	Dickey-Fuller (tau) test
Num lags	0
alpha	1.00071
TestStat	10.94099
P-value	1.00000

Num obs 79.00000
 LogLike 277.20587
 AIC -6.99255
 Var res 0.000053117

Unit root tests for LGDP

Dickey-Fuller (tau) test

Num lags 2
 alpha 0.99434
 TestStat -1.48908
 P-value 0.53891
 Const 0.078763
 t(Const) 1.63284
 Num obs 77.00000
 LogLike 271.92890
 AIC -6.95919
 Var res 0.000052873

Unit root tests for LGDP

Dickey-Fuller (tau) test

Num lags 2
 alpha 0.99434
 TestStat -1.48908
 P-value 0.53891
 Const 0.078763
 t(Const) 1.63284
 Num obs 77.00000
 LogLike 271.92890
 AIC -6.95919
 Var res 0.000052873

OPTIONS FOR THIS ROUTINE

ALL = FALSE	ALLORDER = FALSE	COINT = FALSE
CONST = TRUE	DF = TRUE	EG = FALSE
JOH = FALSE	MAXLAGS = 4	MINLAGS = 0
PP = FALSE	PRINT = TRUE	RULE = AIC 2
SEAS = FALSE	SEAST = FALSE	SEASTSQ = FALSE
SILENT = FALSE	TERSE = FALSE	TREND = TRUE
TSQ = FALSE	UNIT = TRUE	WS = FALSE

Unit root tests for DLGDP

Dickey-Fuller (tau) test

Num lags	0	1	2	3	4
alpha	-0.043957	0.091503	0.23129	0.35590	0.37648
TestStat	-8.84656	-5.58394	-3.96102	-3.00048	-2.80496
P-value	8.14100D-13	0.000015702	0.0099820	0.13195	0.19513
Const	0.013480	0.012006	0.010528	0.0092631	0.0091567
t(Const)	6.31580	4.89302	3.91184	3.25989	3.18831
Trend	-0.000098906	-0.000093225	-0.000089293	-0.000087491	-0.000089610
t(Trend)	-2.63295	-2.46999	-2.36997	-2.33317	-2.35097
dy(- 1)	.	-0.13631	-0.28959	-0.43673	-0.46849
t(dy(- 1))	.	-1.20525	-1.78107	-2.22709	-2.19636
dy(- 2)	.	.	-0.15045	-0.31134	-0.35523
t(dy(- 2))	.	.	-1.30615	-1.86615	-1.76043

dy(- 3)	.	.	.	-0.15390	-0.19904
t(dy(- 3))	.	.	.	-1.32660	-1.21389
dy(- 4)	-0.041824
t(dy(- 4))	-0.39198
Numobs	75.00000	75.00000	75.00000	75.00000	75.00000
LogLike	268.43239	269.19187	270.09486	271.03932	271.12396
AIC	-7.07820	-7.07178	-7.06920	-7.06772	-7.04331
Varres	0.000047478	0.000047181	0.000046716	0.000046215	0.000046789

Unit root tests for DLGDP

Num lags	0
alpha	0.045710
TestStat	-9.22357
P-value	1.77045D-15
Const	0.0085958
t(Const)	7.02070
Num obs	79.00000
LogLike	277.65812
AIC	-6.97869
Var res	0.000053195

Dickey-Fuller (tau) test

Unit root tests for DLGDP

Num lags	0
alpha	0.58480
TestStat	-4.70567
P-value	3.90149D-06
Num obs	79.00000
LogLike	258.11441
AIC	-6.50923
Var res	0.000086128

Dickey-Fuller (tau) test

Unit root tests for DLGDP

Num lags	2
alpha	0.43280
TestStat	-3.01552
P-value	0.033471
Const	0.0050094
t(Const)	2.61942
Num obs	77.00000
LogLike	273.48625
AIC	-6.99964
Var res	0.000050777

Dickey-Fuller (tau) test

Unit root tests for DLGDP

Num lags	2
alpha	0.43280
TestStat	-3.01552

Dickey-Fuller (tau) test

P-value	0.033471
Const	0.0050094
t(Const)	2.61942
Num obs	77.00000
LogLike	273.48625
AIC	-6.99964
Var res	0.000050777

7.2.2 phillips-Perron 検定

Phillips-Perron 検定では、ラグを augment するかわりに、検定統計量に non-parametric な修正を行なう。

$$\Delta y_t = \alpha + \mu t + \rho y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{AR}(p)$$

ADF 検定よりも検出力は高いが、size distortion が起きやすい。つまり、ADF 検定に比べて、実際のデータに単位根があろうとなかろうと、単位根がないと判断する可能性が高い。Phillips-Perron 検定は、 ε_t が次のような負の MA 項をもつときは帰無仮説を棄却しやすい。e. g.

$$\varepsilon_t = u_t - \theta u_{t-1}, \quad \theta > 0$$

TSP で Phillips-Perron 検定を行なうには coint コマンドにオプション df の代わりに pp とすればよい。

7.3 2変数間の共和分検定

ここでは Engle and Granger (1987) による共和分検定を紹介する。7.1 節で述べたように、変数 X と Y が各々単位根をもつならば、次に X と Y が共和分の関係にあるか調べる必要がある。もし共和分関係が成立しているのならば、それを $Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t$ と書くことが許される。このとき $Y_t - \alpha - \beta X_t$ は定常であるから、誤差項 $\{\varepsilon_t\}$ も定常である。従って Y を X に回帰して、 ε_t の推定値 $\hat{\varepsilon}_t$ を得る。この回帰の係数の推定値は super consistent であると言われ意外にも通常より速く真の値に収束する (Stock (1987))。そして ε_t について ADF 検定を考えればよい。すなわち

$$\Delta \varepsilon_t = \alpha + \mu t + \rho \varepsilon_{t-1} + \sum_{i=1}^p \rho_i \Delta \varepsilon_{t-i} + v_t$$

において

$$H_0: \text{共和分関係がない} \Leftrightarrow \varepsilon_t \text{ に単位根がある} \Leftrightarrow H_0: \rho = 0$$

$$H_1: \text{共和分関係にある} \Leftrightarrow \varepsilon_t \text{ は定常} \Leftrightarrow H_1: \rho < 0$$

として ρ を検定すればよい。TSP で Engle and Granger (1987) 検定を行なうには coint (nouint, maxlags=4, eg) $y x$;

とする。

同様に X を Y に回帰して、その残差について ADF 検定を考えることができる。このとき 2 つの検定の結果が異なる結論を導く場合がある。これは Engle and Granger (1987) 検定の欠点

の1つであり、このときどのように結果を解釈してよいかわからない。1つには検定に用いた変数が正しくなかった可能性がある。

8. 結びにかえて

本稿では、単変量時系列モデルを分析する際の理論的な背景と、実用上の手引きを示した。特にソフトウェア・パッケージである TSP を使って、具体例を用いながらコマンドの使い方を学ぶことに主眼を置いて説明した。読者諸氏の理解の手助けになれば幸いである。

参考文献

- 1) Campbell, J. Y. and P. Perron (1991) "Pitfalls and Opportunities: What Macroeconomists Should Know about Unit Roots," *Technical Working Paper 100*, NBER Working Paper Series.
- 2) Dolado, J. J., T. Jenkinson, and S. Sosvilla-Rivero (1990) "Cointegration and Unit Roots," *Journal of Economic Surveys*, 4, 249--273.
- 3) Enders, W. (1995) *Applied Econometric Time Series*, John Wiley & Sons.
- 4) Engle, R. F. and C. W. J. Granger (1987) "Co-Integration and Error Correction: Representation, Estimation and Testing," *Econometrica*, 55, 251--276.
- 5) Granger, C. W. J. and P. Newbold (1974) "Spurious Regressions in Econometrics," *Journal of Econometrics*, Vol. 2, pp. 111--120.
- 6) Hamilton, J. D. (1994) *Time Series Analysis*, Princeton University Press.
- 7) Harvey, A. C. (1981a) *Time Series Models*, Phillip Allan, Oxford, (国友直人・山本拓訳『時系列モデル入門』, 東大出版会, 1985)
- 8) Harvey, A. C. (1981b) *Econometric Analysis of Time Series*, Phillip Allan, Oxford.
- 9) Johansen, S. (1988) "Statistical Analysis of Cointegration Vectors," *Journal of Economic Dynamics and Control*,
- 10) Maddala, G. S. (1992) *Introduction to Econometrics*, Prentice-Hall, N. J.
- 11) Stock, J. H. (1987) "Asymptotic Properties of Least-Squares Estimators of Co-Integrating Vectors," *Econometrica*, 55, 1035--1056.
- 12) 山本拓 (1988) 『経済の時系列分析』, 創文社。

プログラム・ファイル

```
armal. tsp
options crt ; freq n ;
set nsamp = 1000 ; set maxlag = 2 ;
set nsamp 1 = nsamp + maxlag ; set ini = maxlag + 1 ;
sampl 1 nsamp 1 ; random e ; dot 1 - 4 ; y. = 0 ; enddot ;
smpl ini nsamp 1 ;
y1 = .8 * y1(-1) + e ;
y2 = -.8 * y2(-1) + e ;
y3 = .4 * y3(-1) + e ;
y4 = .4 * y4(-1) - .5 * y4(-2) + e ;
dot 1 - 4 ; bjidnt(NOPLOT, NOPLTRAW) y. ; enddot ;
```

```
arma2. tsp
options crt ; freq n ;
set nsamp = 1000 ; set maxlag = 2 ;
set nsamp 1 = nsamp + maxlag ; set ini = maxlag + 1 ;
smpl ini nsamp 1 ;
y1 = e - .8 * e(- 1 ) ;
y2 = e + .8 * e(- 1 ) ;
y3 = e - .4 * e(- 1 ) - .5 * e(- 2 ) ;
y4 = e - .4 * e(- 1 ) + .5 * e(- 2 ) ;
dot 1 - 4 ; bjidnt(NO PLOT, NO PL TRAW) y. ; enddot ;
```

```
arma3. tsp
options crt ; freq n ;
set nsamp = 1000 ; set maxlag = 2 ;
set nsamp 1 = nsamp + maxlag ; set ini = maxlag + 1 ;
sampl 1 nsamp 1 ; random e ; dot 1 - 4 ; y. = 0 ; enddot ;
smpl ini nsamp 1 ;
y1 = .7 * y1(- 1 ) + e - .8 * e(- 1 ) ;
y2 = -.7 * y2(- 1 ) + e + .8 * e(- 1 ) ;
y3 = .5 * y3(- 1 ) + .6 * y3(- 2 ) + e - .4 * e(- 1 ) - .5 * e(- 2 ) ;
y4 = .5 * y4(- 1 ) - .6 * y4(- 2 ) + e - .4 * e(- 1 ) + .5 * e(- 2 ) ;
dot 1 - 4 ; bjidnt(NO PLOT, NO PL TRAW) y. ; enddot ;
```

```
arma4. tsp
options crt ; freq n ;
set nsamp = 1000 ; set maxlag = 2 ;
set nsamp 1 = nsamp + maxlag ; set ini = maxlag + 1 ;
sampl 1 nsamp 1 ; random e ; dot 1 - 4 ; y. = 0 ; x. = 0 ; enddot ;
smpl ini nsamp 1 ;
x1 = .7 * x 1 (- 1 ) + e - .8 * e(- 1 ) ;
x2 = -.7 * x 2 (- 1 ) + e + .8 * e(- 1 ) ;
x3 = .5 * x3(- 1 ) + .6 * x3(- 2 ) + e - .4 * e(- 1 ) - .5 * e(- 2 ) ;
x4 = .5 * x4(- 1 ) - .6 * x4(- 2 ) + e - .4 * e(- 1 ) + .5 * e(- 2 ) ;
dot 1 - 4 ; y. = x. = y.(- 1 ) ;
bjidnt(NO PLOT, NO PL TRAW) y. ; enddot ;
```

```
gdp. tsp
options limwarn=0 ; options crt ; freq q ;
smpl 55 : 2 95 : 2 ;
load(file='gdp. dat') gdp ;
lgdp = log(gdp) ;
smpl 73 : 1 95 : 2 ;
dlgdp = log(gdp / gdp(- 1 )) ;
smpl 74 : 1 93 : 4 ;
dot l dl ; plot. gdp ; msd. gdp ;
bjidnt(NO PLOT, NO PL TRAW) .gdp ; enddot ;
```

```
regopt(noprint) all ;
mat aic=ident(5) ;
```

```

do p=0, 4 ; do q=0, 4 ; set i=p + 1 ; set j=q + 1 ;
if p=0 & q=0 ; then ; do ; msd(sil) dlgrp ;
set aic(i, j) = log(@stddev ** 2) + 2 *(p+q) / @nob ; enddo ;
else ; do ;
bjest(nar=p, nma=q, NOPLOT, NOCUMPLO, NOSTART, sil, maxit=50) dlgrp ;
set aic(i, j) = log(@s ** 2) + 2 *(p+q) / @nob ; enddo ;
enddo ; enddo ;
print aic ;

regopt(print) all ;
bjest(nar=4, nma=0, NOPLOT, NOCUMPLO, NOSTART, sil, maxit=50) dlgrp ;
bjest(nar=1, nma=2, NOPLOT, NOCUMPLO, NOSTART, sil, maxit=50) dlgrp ;
bjest(nar=1, nma=3, NOPLOT, NOCUMPLO, NOSTART, sil, maxit=50) dlgrp ;

smpl 93 : 4 94 : 4 ;
bjfrfst(nhoriz=4, orgbeg=93 : 4 ) dlgrp ;

```

```

gdp2. tsp
options limwarn=0 ; options crt ; freq q ;
smpl 55 : 2 95 : 2 ;
load(file='gdp. dat') gdp ;
lgdp = log(gdp) ;
smpl 73 : 1 95 : 2 ;
dlgrp = log(gdp / gdp(- 1 )) ;
smpl 74 : 1 93 : 4 ;
coint(df, maxlags=4, const, trend, rule=aic2, NOWS, print) lgdp ;
coint(df, maxlags=0, const, notrend, rule=aic2, NOWS) lgdp ;
coint(df, maxlags=0, noconst, notrend, rule=aic2, NOWS) lgdp ;
coint(df, maxlags=2, minlags=2, const, notrend, rule=aic2, NOWS) lgdp ;
coint(df, maxlags=2, minlags=2, const, notrend, rule=aic2, NOWS) lgdp ;

coint(df, maxlags=4, const, trend, rule=aic2, NOWS, print) dlgrp ;
coint(df, maxlags=0, const, notrend, rule=aic2, NOWS) dlgrp ;
coint(df, maxlags=0, noconst, notrend, rule=aic2, NOWS) dlgrp ;
coint(df, maxlags=2, minlags=2, const, notrend, rule=aic2, NOWS) dlgrp ;
coint(df, maxlags=2, minlags=2, const, notrend, rule=aic2, NOWS) dlgrp ;

```
