

## 線型回帰分析の推定誤差と係数の信頼性

稲葉和夫

- I. はじめに
- II. 線型回帰モデルの諸仮定と係数の信頼性
- III. 係数の信頼性と検定統計量
- IV. モデルの選択にかかわる諸問題

### I. はじめに<sup>1)</sup>

計量経済学を用いての実証分析は、ケインズ理論をはじめとしてさまざまな理論・仮説、経済政策の有効性を検討する上で非常に重要な役割を果たしてきた。特に、計量モデル分析において、線型回帰分析の手法は、現実の経済主体の経済行動様式を数量的に評価する方法として最も多く用いられてきたといつてよい。分析のさいに重要なことは、1) どのような経済理論モデルを作成し、線型回帰モデルにあてはめるか、2) 線型回帰モデルのパラメータ推定に使用するデータをどのように選択し、利用するのか、3) 推定された複数の回帰方程式をどのような方法で評価するのか等の問題を明確にしておくことである。1) は、分析者が依拠する経済理論にかかわる問題である。2) は、経済統計の知識を前提にモデルの特定化にかかわる。3) は、いかなる検定統計量をモデルの選択基準として利用し、どのような仮説・理論を採用するのかにかかわる。1)、2)、3)の段階は、実際の研究プロセスでは密接な関連を持っている。3)の段階の手法は、極めて技術的な側面をもつが、計量分析でのモデルの選択を行うさいに重要な位置を占める。3)の分析を進めるにあたって、計量経済学の教科書では、線型回帰モデルの説明変数では説明されない部分(誤差)についての諸仮定のもとで理論的に導出される検定統計量を利用して、諸仮定の妥当性の検

討および設定された理論・仮説の検討方法の説明がなされる。分析の基本となるのは、検定統計量の確率分布関数を導くために線型回帰モデルでは説明されない残差に確率的性質の仮定を前提としていることである。

経済学の統計資料は自然科学分野とは異なり、実験室の中で行われる繰り返しの実験にもとづくものではないから、誤差項の確率的性質の仮定（確率誤差項の仮定）を現実に検証することは極めて困難である。クロスセクションデータによる分析では、標本抽出方法の性質から確率誤差項の仮定を正当化する（justfy）こともいくつかのケースでは可能であるが、同様な議論が可能かどうかは極めて疑わしい。このような確率誤差項の仮定を正当化しうるかどうかは、分析者の現実の経済社会に対する認識のレベルに依存する<sup>2)</sup>。

確率誤差項の仮定を前提にして導出される検定統計量は、実際の検定の段階ではデータを関数とする統計量の実測値に置き替えられるから、われわれは、確率誤差項の仮定をはずして線型回帰モデルの推定誤差から得られる統計量を分析することによって、検定統計量の意味づけを検討することも可能である。

本稿の目的は、線型回帰モデルに確率誤差項の仮定を前提にして得られた検定統計量が、確率誤差項の仮定をはずしてもモデルの選択基準として一定の意義をもつことを明らかにすることにある。本稿の目的にしたがい、以下Ⅱでは、計量経済学の教科書で通常（古典的）線型回帰モデルとしておかれる諸仮定の内容を検討し、それらの諸仮定の妥当性が現実に疑わしい場合にはどのような問題が生じるかを考察する。そして、実際の分析においては、これらの問題は回帰係数（構造パラメータ）の信頼性の問題に帰着することを明らかにする。Ⅲでは、係数の信頼性と諸仮定の現実的妥当性を検討する検定統計量の分析が、推定残差の分析に帰着することを明らかにする。最後に、Ⅳでは回帰分析によるモデルの選択をめぐる諸問題について考察する。

- 1) 本稿執筆の動機は、久本[13]、Johnston [15] Chap.12 の内容から刺激を受けたことによる。したがって、本稿の内容も主として上記2文献を参考にしている。特に、Ⅲでは計量経済学の内容にそうという主旨から、その多くを Johnston の説明をベースとして議論を展開している。分析の対象を、いわゆる古典的線型回帰モデルをめぐる係数の信頼性と検定統計量に限定しているため、推定量の漸

近的性質, 同時方程式をめぐる問題, 分布ラグ問題, 時系列問題にはほとんど言及していない。これらの内容を含めた本稿にかかわる問題は, 今後の課題としたい。

- 2) 確率誤差項の仮定を正当化するための考えられる根拠については, 佐和[20], p.182-187 にコンパクトにまとめられている。また, 計量モデルを含めた経済学において数学的手法を用いることは是非に関する議論は, 経済統計学会[16]収録の諸論文で展開されている。

## II. 線型回帰モデルの諸仮定と係数の信頼性

### II-1 線型回帰モデルの諸仮定

経済変数  $Y$  (被説明変数) を  $(k-1)$  個の経済変数  $X_2, \dots, X_k$  (説明変数) で説明する次のような線型回帰モデルを考えることにしよう。

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_k X_{ik} + u_i; \quad i=1, \dots, n \quad (1)$$

ここで,  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$  は未知の構造パラメータ,  $u_i$  は確率誤差項 (攪乱項), 添字  $i$  は  $i$  番目の観測値,  $n$  は標本の大きさをあらわす。

あるいは,

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u} \quad (2)$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & X_{12} & \dots & X_{1k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & X_{n2} & \dots & X_{nk} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

(1)式あるいは(2)式の最小自乗推定量を  $\mathbf{b}' = (b_1, \dots, b_k)$  とすると,

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \quad (3)$$

が得られる。さて, 通常の (古典的) 線型回帰モデルでは, 行列  $\mathbf{X}$  および攪乱項  $\mathbf{u}$  について以下のような仮定がおかれる。

A-1 攪乱項  $\mathbf{u}$  の期待値はゼロ, すなわち  $E(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

A-2  $E(\mathbf{u}\mathbf{u}') = \sigma^2\mathbf{I}$  (4)

A-1より  $E(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$  であるから, 分散共分散行列  $E(\mathbf{u}\mathbf{u}')$  について2つの仮

定がなされていることを意味する。第1は、 $\mathbf{u}$ の分散が標本  $i$  とは無関係に一定値をとること（均一分散性 Homoscedasticity の仮定）、第2は、全ての攪乱項  $u_i$  について異なる2組の標本の間には相関がないことである。すなわち、

$$E(u_i u_j) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{for } i=j \\ 0 & \text{for } i \neq j \end{cases} \quad (5)$$

A-3  $\rho(\mathbf{X})=k$ 。説明変数の列ベクトルの組の階数は  $k$ 、すなわち、列ベクトルの組は互いに独立である。(3)式の逆行列  $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$  が存在することを保証する。

A-4  $\mathbf{X}$ は非確率行列である。この仮定により、攪乱項  $\mathbf{u}$  と  $\mathbf{X}$ は互いに独立であることが保証される。

A-5 攪乱項  $\mathbf{u}$ は多変量正規分布にしたがう。A-1, A-2, A-5をまとめると、(6)式のように表現される。

$$\mathbf{u} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}) \quad (6)$$

次に、仮定A-1~A-5について若干の検討を行うことにしよう。確率誤差項  $\mathbf{u}$ の仮定を前提にすれば、A-1はそれ程強い仮定ではない。なぜなら、最小自乗法による推定残差  $n \times 1$  ベクトルを  $\mathbf{e}$  とすると、

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}'\mathbf{b} + \mathbf{e} \quad (7)$$

であるから、(3)式との関係により

$$\mathbf{X}'\mathbf{e} = \mathbf{0}$$

が導かれる。ベクトル  $\mathbf{X}'\mathbf{e} = \mathbf{0}$  の第1要素は、 $\sum_{i=1}^n e_i = 0$  をあらわし、推定残差  $e_i$  の和がゼロ、すなわち  $e_i$  の平均値がゼロであることから、攪乱項  $\mathbf{u}$ の期待値（平均値）がゼロであると仮定してもさしつかえないであろう。

A-4の仮定は、行列  $\mathbf{X}$ は操作可能な変数で、変動の原因は  $\mathbf{u}$ 、 $\mathbf{y}$ にあるということの意味する。経済学においては、いくつかのクロスセクションデータによる標本抽出の分析を除いては、他の標本を入れ替えるという実験は不可能である。また、 $\mathbf{X}$ 自身が相互にあるいは他の変数の変動の結果であると考えられ、 $\mathbf{X}$ を操作可能な変数として取り扱うことには無理がともなう。われわれが問題としている単一方程式では、1回限りの歴史的結果として一組の標本が与えら

れていると考えることによって、 $X$ を非確率変数とみなすことにする。<sup>3)</sup> A-5の仮定をはずしても、確率誤差項の仮定から十分大きな標本 $n$ に対して、A-1、A-2を結合して近似的に(6)式が成立することを導くことができる。また、後に述べるように、A-1、A-2の仮定が実際の分析において満足されるかが検討の対象となる。

ところで、仮定A-1～A-5の成立が何故重要かは、最小自乗推定値が次のような性質を持つと考えられているからに外ならない。仮定A-1～A-5のもとで、最小自乗推定量 $b$ の期待値は $E(b) = \beta$ 、すなわち構造パラメータに一致する。この性質は不偏性と呼ばれ、 $\beta$ を真のパラメータとみなしている。そして、 $b$ の分散は $\text{Var}(b) = \sigma^2(X'X)^{-1}$ が得られるが、ガウス・マルコフの定理により不偏推定量の中で最小の分散をもつ推定量であることが証明される。<sup>4)</sup>この望ましいと考えられている $b$ の性質は、最小分散不偏推定量 (Best Linear Unbiased Estimator) と呼ばれ、A-1～A-5のいずれかが満たされなくなると成立しない。

確率誤差項の仮定、A-4、およびA-5は、われわれがどのような現実認識のもとでモデル作成を進めるかにかかわる問題であり、統計資料を用いて検証する性格のものではない。以下では、統計資料による検討対象となるA-2、A-3の仮定について、どのような状況のもとでそれぞれの現実的妥当性が疑わしくなるか、そして、その結果推定上どのような問題が生じるかを考察する。

## II-2 不均一分散性 (Heteroscedasticity)

クロスセクションデータ、例えば、家計貯蓄動向調査の個票から $n$ 個の標本をランダムに抽出したデータを用いて、貯蓄関数を推定する簡単なモデルを考える。

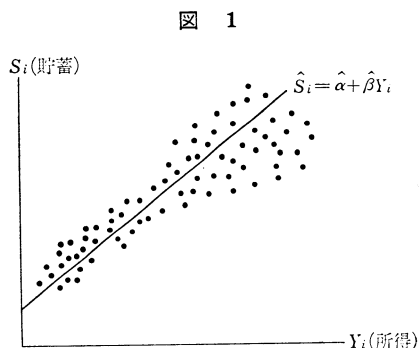
$$S_i = \alpha + \beta Y_i + u_i; i = 1, \dots, n \quad (8)$$

ここで、添字 $i$ は各家計、 $S_i$ は家計の実質貯蓄額、 $Y_i$ は実質可処分所得、 $u_i$ は攪乱項、 $\alpha$ 、 $\beta$ は構造パラメータをあらわす。<sup>5)</sup>

一般的にいて、低所得者層では可処分所得の大半を日常の消費支出にふりむけざるを得ないから、貯蓄率は低く消費と所得の関係、つまり貯蓄と所得の

関係は安定していると考えられる。これに対して、高所得者層では相対的に所得を日常の消費支出にふりむける割合が少なくて済み、貯蓄率も比較的高いと考えられる。そして、所得が高まるにつれて可処分所得の支出自由度がより高くなるから、日常の消費支出以外の消費支出の割合が高くなり、その時々のあるいは各家計の貯蓄性向がかなり異なってくるであろう。すなわち、高所得者層の方が低所得者層に比べて同一所得のもとでの貯蓄率のバラツキは大きくなると考えられる。<sup>6)</sup>

各家計の貯蓄と所得との関係を図示すれば、図1のようになる。右図において、プロットは各家計の貯蓄と所得の組をあらわす。最小自乗法によって、(8)式の推定線が  $\hat{S}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}Y_i$  で求められたとすると、家計の貯蓄率をあらわす点が低所得者層では直線のまわりに密集しているのに対して、高所得者層では推定線の回



りにより広い範囲でのバラツキが見られる。同じことを推定誤差でいいかえると、低所得者層での推定誤差は小さく、高所得者層のそれは大きい。このように所得階層を大きく2つのグループに分けた場合、誤差分散から判断する限り攪乱項の分散が標本を通じて一定であると仮定するよりは、2つのグループの分散が異なるとみなした方が適切であろう。このような状況を不均一分散性が存在するという。不均一分散性のもとでは、 $S_i$  を  $Y_i$  上に単純に回帰して最小自乗法を適用すると、 $\beta$ の係数推定値  $\hat{\beta}$ の信頼性が高所得者層では低くなり、推定誤差が大きくなることが図1より直感的に確められる。確率誤差項の仮定のもとでは、不均一分散性が存在しても(3)式の最小自乗推定量  $\hat{\beta}$ の不偏性は導かれるが、均一分散性を仮定した場合の検定が無意味となる。

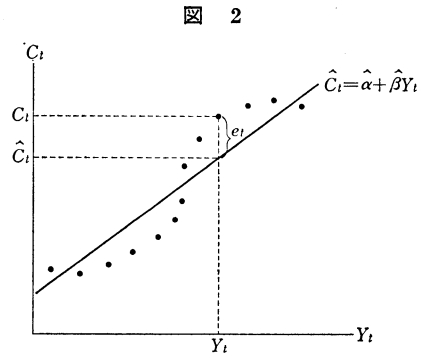
## II-3 系列相関 (Serial-Correlation)

時系列データを用いた分析では、ラグ付き被説明変数を説明変数としない線型回帰モデルにおいて、攪乱項  $u$  の共分散がゼロであるという仮定に問題の生じることが多い。ここでは、マクロレベルでの簡単な消費関数を考えることにする。

$$C_t = \alpha + \beta Y_t + u_t; t=1, \dots, n \quad (9)$$

ここで、添字  $t$  は時点、 $C_t$  は実質民間最終消費支出、 $Y_t$  は実質個人可処分所得、 $u_t$  は攪乱項、 $\alpha$ 、 $\beta$  は構造パラメータをあらわす。

(9)式に最小自乗法を適用して得られた推定線  $\hat{C}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta} Y_t$  の推定値  $\hat{C}_t$  と実測値  $C_t$  との推定誤差  $e_t (= \hat{C}_t - C_t)$  について、異時点間に強い相関が存在すれば、系列相関による問題が生じていると考えられる。図2では、過小推定 ( $e_t < 0$ ) の状況が数期間続き、過大推定 ( $e_t > 0$ ) の状況が数期間続く傾向を示している。



このとき  $\sum_{t=2}^n e_t e_{t-1}$  はプラスの値をとるから、一次の正の系列相関が存在しているという。また、過小推定・過大推定が交互に生じる傾向が強い場合には、 $\sum_{t=2}^n e_t e_{t-1}$  は負の値をとるから、負の系列相関があるという。図2の消費の推定誤差  $e_t$  に循環的変動が見られ、推定線  $\hat{C}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta} Y_t$  では  $C_t$  の変動の方向をとらえきれないことを示している。いいかえると、(9)式によるあてはめが関数型として不十分であることを意味している。

関数型が悪い理由として、第1に、 $C_t$  を  $Y_t$  以外の変数でも説明する必要があるのかもしれない。 $Y_t$  だけで説明しきれない推定誤差  $e_t$  の中に  $C_t$  を説明すべき変数 (例えば資産の状態・過去の消費慣習等々) が含まれていると考えられる場合には、 $e_t$  にある種の傾向をもたらす可能性がある。例えば、このモデルで資産残高の大きさが消費にプラスの影響をもたらす、重要な変数であっ

たとして。標本期間内で、数期間一定率以上で資産残高が増加している場合には、変数として含まれていないことから過小推定の状況が続く可能性が強い。逆に、資産残高が数期間一定率以下でしか増加しない場合には、過大推定の状況が続く可能性が強い。第2に、 $C_t$  と  $Y_t$  には非線型の関係があると想定すべきなのかもしれない。そして、両変数を適当に変数変換した後、新たな変数について最小自乗法を適用するか、直接  $C_t$  と  $Y_t$  に非線型モデルの方法を適用するかである。

確率誤差項の仮定のもとでは、系列相関が存在すれば、最小自乗推定量  $\mathbf{b}$  は不偏性をもつが、分散の推定量はバイアスをもつことが確かめられている。(9)式の係数推定値  $\hat{\beta}$  は、図2で見る限り全体のトレンドをつかんではいないが、消費の変化の方向を追跡しきれていない点で信頼性が低いと考えられる。

#### II-4 多重共線関係

線型回帰モデル(2)において、説明変数のどれか2つの組に厳密な線型関係があれば、仮定A-3が満たされなくなり、逆行列  $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$  が存在せず最小自乗推定量を(3)式のように一意に求めることができない。実際問題としては、説明変数間に厳密な共線関係が生じることはまずありえないから、2変数の標本相関係数の絶対値が1に近い場合が問題となる。時系列データによる分析では、説明変数が2個以上であれば、同様なトレンド変数で被説明変数を説明しようとする場合が多くなり、多重共線関係による問題が生じる可能性が強い。次のような2説明変数モデルを考えることにしよう。

$$y_t = \beta_2 x_{2t} + \beta_3 x_{3t} \quad (10)$$

ここで、 $y_t$ 、 $x_{2t}$ 、 $x_{3t}$  はそれぞれ平均からの偏差であらわされている。最小自乗推定量は、

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{1-r_{23}^2} \begin{pmatrix} (r_{12}-r_{23}r_{13}) \sqrt{\frac{\sum y^2}{\sum x_{2t}^2}} \\ (r_{13}-r_{23}r_{12}) \sqrt{\frac{\sum y^2}{\sum x_{3t}^2}} \end{pmatrix} \quad (11)$$

ここで、 $r_{12}$  は  $y$  と  $x_2$  の相関係数、 $r_{23}$  は  $x_2$  と  $x_3$  の相関係数、 $r_{13}$  は  $y$



と  $x_3$  の相関係数をあらわす。説明変数  $x_2$  と  $x_3$  との間の相関係数が1に近く ( $r_{23} \doteq 1$ )、強い共線関係が生じているとしよう。(11)式で  $r_{12}$  と  $r_{13}$  は同符号をもつから、 $\hat{\beta}_2$ 、 $\hat{\beta}_3$  の分子は  $r_{23}$  の値が大きくなるにつれて小さくなる。  $1 - r_{23}^2$  も小さくなるから、 $\hat{\beta}_2$ 、 $\hat{\beta}_3$  の絶対値は逆に大きくなるかもしれない。しかし、例えば  $r_{13}$  が  $r_{12}$  に比してかなり大きかったとすると、 $\hat{\beta}_2$  の分子は0に近くなるかマイナスになる。それに対して、 $\hat{\beta}_3$  の分子はそれ程小さくならず、 $\hat{\beta}_3$  自身は大きくなるかもしれない。計量モデルを作成するさいに 変数間の因果関係自体を検証の対象とするのであれば、多重共線関係などは問題でないのかもしれない。<sup>7)</sup>しかし、モデル作成において因果関係の方向と符号条件は、あらかじめ考えておかなければならない重要な仮説である。計量モデルでの係数の符号条件は、経済理論と実際のデータにもとづく変数間の相関関係の強さによって決められる。もし、 $y$  と  $x_2$  の相関係数  $r_{12}$  がかなり強いプラスの値であったとしたら、 $y$  を単純に  $x_2$  上に回帰したときには、傾きの係数推定値  $b_{12} \left( = r_{12} \sqrt{\frac{\sum y^2}{\sum x_{2t}^2}} \right)$  はプラスの値をとる。にもかかわらず、 $r_{23} \doteq 1$  のため、 $\hat{\beta}_2$  の値は経済効果としては非常に小さなものになったり、仮説として設定された符号条件を満たさない推定結果となる可能性がある。説明変数間の相関係数が  $-1$  に近い場合にも、起りうる問題についても同様に考えることができる。多重共線関係による問題は、さきに述べたように説明変数が強いトレンドをもつことによって生じる場合が多く、関数型の問題にもかかわる。説明変数のトレンドを除去するために、時間の階差  $X_t - X_{t-1}$ 、変化率  $\frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}}$  を変数にすることが考えられる。あるいは、説明変数間に線型制約条件を課して推定を行うとか、クロスセクションデータからの情報を利用する等、説明変数の数を減少させ、多重共線関係の問題が生じる余地をできるだけ小さくすることが必要となる。

多重回帰分析に用いられる説明変数間には多かれ少かれ相関関係があり、ある説明変数の変動には他の説明変数の変動が含まれていると考えられるため、他の説明諸変数の効果を除去した形で被説明変数を説明することになる。そのさい、説明変数間の相関が極めて強いときには、(11)式から多重共線関係にとも

なう係数の信頼性・安定性の問題が顕在化する。

この節では、A-2、A-3の仮定のいずれかが満足されなくなると、線型回帰モデルの推定結果は推定誤差に一定の傾向をもたらすが、係数の符号条件を満たさなくなる等を通じて係数の信頼性を著しく低下させてしまうことを確認した。次節では、通常行われている係数の信頼性のテストのいくつかを検討し、確率誤差項の仮定をはずしたときそれぞれの検定統計量がどのような意味をもつかを考察することにしよう。

- 3)  $\mathbf{X}$ が確率的な変数とみなしうる場合には、 $\mathbf{X}$ と $u$ が独立に分布するという仮定が必要となる。
- 4) Johnston, 前掲書, p.173-174 参照。
- 5) 実際の推定では、構造パラメータが限界係数 $\beta$ をあらわすのではなくて、弾力性をあらわすように、変数 $S_i, Y_i$ を $\ln S_i = \alpha' + \beta' \ln Y_i$ の関数型にする等の方法も考えられるが、ここでは単純に(8)式の形で考えることにした。
- 6) もちろん、家族人員・年齢構成・消費に対する慣習等によって同一所得の場合でも消費額および消費支出の内容は異なる。これらの要因については考慮せず、消費ないしは貯蓄は所得のみの関数とみなしている。
- 7) Sims [21] は、時系列分析の方法を用いて、GNPと貨幣供給量の因果関係の測定を $F$ 検定によって試みている。Pierce [19] は、このような時系列分析にはいくつかの分析上の欠陥があることを指摘している。

### Ⅲ. 係数の信頼性と検定統計量

#### Ⅲ-1 決定係数と $t$ 検定統計量

決定係数は、線型回帰モデル(2)の最小自乗推定結果 $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\mathbf{b}$ が全体の $\mathbf{y}$ の変動をどの程度説明しているかを示す指標で、

$$\begin{aligned} R^2 &= \hat{\mathbf{y}}'\hat{\mathbf{y}}/\mathbf{y}'\mathbf{y} \\ &= 1 - \mathbf{e}'\mathbf{e}/\mathbf{y}'\mathbf{y} \end{aligned} \quad (12)$$

で定義される。しかし、一般に説明変数の数が多くなると決定係数は大きくなる。<sup>8)</sup>そこで、説明変数の増加分を調整した自由度修正済み決定係数

$$\begin{aligned}\bar{R}^2 &= 1 - \frac{e'e/(n-k)}{y'y/(n-1)} \\ &= 1 - \frac{n-1}{n-k}(1-R^2)\end{aligned}\quad (13)$$

が用いられる。説明変数の数が異なる場合でも、(13)式の自由度修正済み決定係数で回帰直線の適合度を比較することができる。

次に、個々の係数推定値からそれぞれの説明変数が被説明変数に有意な影響を与えているか、すなわち係数推定値がゼロと異なるか否かを検討するために  $t$  検定統計量が用いられる。

$$t_i = \frac{b_i}{s\sqrt{a_{ii}}}\quad (14)$$

ここで、 $b_i$  は第  $i$  説明変数の係数推定値、 $s$  は自由度で除した標準誤差、 $a_{ii}$  は逆行列  $(X'X)^{-1}$  の第  $i$  対角要素をあらわす。

通常、 $t$  検定統計量は対象となる変数が説明変数としての資格があるかどうかを検討する重要な指標とみなされている。ここでは、まず攪乱項に対する正規性を仮定した場合の  $t$  統計量の解釈を検討し、次に確率誤差項の仮定をはずした場合の  $t$  統計量の意味づけを考えてみる。

攪乱項  $u$  に対する正規性の仮定のもとで、係数推定値  $b_i$  の有意性を検討するために、帰無仮説  $H_0: \beta_i = 0$ 、対立仮説  $H_1: \beta_i \neq 0$  が設定される。仮説  $H_0$  が真であるとするならば、(14)式の  $t_i$  は自由度  $n-k$  の  $t$  分布にしたがうことが理論的に証明される。適当な有意水準 (例えば 0.05) に対応する有意点を自由度  $n-k$  の  $t$  分布表から求め、仮説検定のための棄却域を設定する。推定結果より、 $t_i$  の実現値  $t_{i0}$  が棄却域にはいれば、仮説  $H_0$  が棄却され係数推定値  $b_i$  は有意であるとされる。 $t_{i0}$  が棄却域にはいられなければ、仮説  $H_0$  は採択され係数推定値  $b_i$  は有意でないとされる。仮説  $H_0$  が採択されることは、説明変数  $x_i$  が  $y$  に対して有意な影響を与えていないことを意味するが、さらに推定結果からは係数の符号をプラスともマイナスとも判定できず不安定であることを示している。(14)式の  $t_i$  の分母は、理論的には係数  $\beta_i$  の標準誤差であるから、実測値  $t_{i0} > 2$  であったとすれば、実数直線上に 0 を基点としてプラ

ス・マイナスの方向に  $\beta_i$  の標準誤差の2倍の範囲をとったとしても  $b_i$  がその中に含まれない。その意味で  $b_i$  は0とは異なり有意であると判断される。

さて、確率誤差項の仮定をはずして(14)式の  $t_i$  の意味づけを考えるために、 $t_i$  を(15)式のように  $y$  と  $x_i$  の偏相関係数  $r_i$  であらわすとしよう。

$$t_i = \frac{r_i \sqrt{n-k}}{\sqrt{1-r_i^2}} \quad (15)$$

(15)式は、 $x_i$  で説明される部分  $r_i$  と  $x_i$  で説明されない残差  $\sqrt{\frac{1-r_i^2}{n-k}}$  との比であらわされている。 $t_i$  は  $r_i$  の増加関数であることが確かめられているから、説明変数  $x_i$  の  $y$  を説明する貢献度  $r_i$  が高くなれば  $t_i$  は高くなり、逆に  $x_i$  の貢献度  $r_i$  が低くなれば  $t_i$  も低くなるという関係がある。<sup>10)</sup> (15)式を別の角度から見るために、説明変数  $x_i$  を除外した回帰分析の残差自乗和を  $RSS$ 、 $x_i$  を含めた残差自乗和を  $RSS_i$  とすると、

$$t_i = \sqrt{\frac{(RSS - RSS_i)(n-k)}{RSS_i}} \quad (15')$$

<sup>11)</sup> が導かれる。(15')式は、説明変数  $x_i$  を含めることによって残差がどの程度減少するのか、あるいは  $x_i$  を除外することによって説明されない残差がどの程度増加するのかを意味し、残差の分析を通じて説明変数  $x_i$  の貢献度を測定していることになる。そして、この説明変数  $x_i$  の追加が、全体の説明力である自由度修正済み決定係数を上昇させるのは  $t_i^2 > 1$  のときである。<sup>12)</sup>

以上の考察により、確率誤差項の仮定がなくても  $t$  検定統計量の解釈は可能で、特定の変数が説明変数としてつけ加えられないことにより増加する残差の分析を通じて、その変数の貢献度・有意性を測定している。

### III-2 線型制約テスト

$t$  検定統計量は、個々の係数推定値の有意性を判断する目安として利用できるが、複数の係数推定値の同時検定、あるいは線型制約条件の検定を行うためには利用できない。この問題に関しては、攪乱項  $u$  に対する正規性の仮定のもとで、

$$F = \frac{(r - Rb)' [R(X'X)^{-1}R']^{-1} (r - Rb) / q}{e'e / (n - k)} \quad (16)$$

が自由度対  $(q, n - k)$  の  $F$  分布にしたがうことが利用される。ここで、行列  $R$ 、ベクトル  $r$  は線型制約条件  $R\beta = r$  に対応する  $q \times k$  定数行列、 $q \times 1$  定数ベクトル、 $q$  は制約条件にかかわる数をあらわす。(16)式は、仮説  $H_0: R\beta = r$  が真であると仮定して導かれる  $F$  検定統計量である。

制約条件  $R\beta = r$  のもとでの最小自乗推定量残差ベクトルを  $e_*$  とすると、(16)式は

$$F = \frac{(e'_*e_* - e'e) / q}{e'e / (n - k)} \quad (17)$$

と書き直すことができる。<sup>13)</sup>  $e'_*e_*$  は(2)式に制約条件を課した最小自乗推定量では説明されない残差自乗和、 $e'e$  は制約条件なしの最小自乗推定量(3)では説明できない残差自乗和をあらわすから、(17)式の分子  $e'_*e_* - e'e$  は制約条件の有無による説明されない残差自乗和の差違を示している。その意味では、(17)式は制約条件を課したときにモデル全体の説明力がどの程度失われるかを、制約条件なしの残差自乗和との比で示し、制約条件を課すことの妥当性を検討していると解釈しうる。

II-1で検討した個々の係数推定値の有意性を判断する  $t$  検定統計量は、制約条件を課した  $F$  検定の特殊な場合とみなすことができる。なぜならば、攪乱項  $u$  に関する正規性の仮定のもとでは、 $t_i^2 = F_i$  は自由度対  $(1, n - k)$  の  $F$  分布にしたがうことが確められ、仮説  $H_0: \beta_i = 0$  は、 $R = [\overbrace{0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0}^{i-1} \ 1 \ \overbrace{0 \ \dots \ 0}^{k-i}]$ 、 $r = 0$  とおき、制約条件  $R\beta = r$  の検定として(16)式を利用すればよいからである。

定数項を除くパラメータの有意性を同時に検定しようとするときには、

$$\text{仮説 } H_0: \beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_k$$

であるから、

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

とおき、仮説  $H_0$  のもとで(16)式の  $F$  が自由度対  $(k-1, n-k)$  の  $F$  分布にしたがうことを利用することになる。このとき、

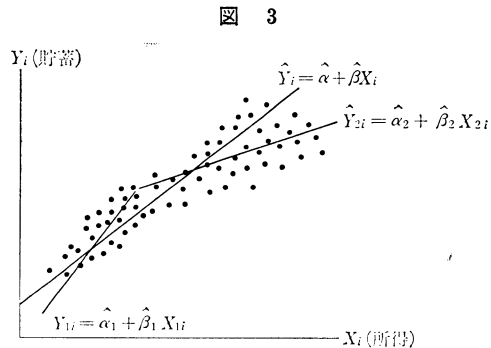
$$F = \frac{R^2/(k-1)}{(1-R^2)/(n-k)}$$

が得られ、 $F$  は決定係数  $R^2$  の関数としてあらわすことができる<sup>14)</sup>。すなわち、定数項を除く回帰超平面で被説明変数の説明できる部分  $\frac{R^2}{k-1}$  と説明できない部分  $\frac{1-R^2}{n-k}$  の比として、係数推定値の有意性を同時に検討している。

制約条件のもとでの最小自乗残差と制約条件なしの最小自乗残差との比較による係数推定値の有意性の検討は、別の角度から、次の構造変化テストにも利用される。

### Ⅲ-3 構造変化テスト

線型回帰モデルの推定結果は、モデルの関数型のみならず、当然のことながらデータのとり方にも依存する。どの範囲のデータを分析に使用するかで係数の有意性・信頼性は異なってくる。例えば、Ⅱ-2での貯蓄関数の分析において、平均的な限界貯蓄性向からの低所得者層と高所得者層のバラツキの差はそれほど深刻な問題でなかったと



しても、両者の貯蓄行動には大きな差があり、図3のような状況では、単一の方程式で係数を推定することが無理であるのかもしれない。いいかえると、低所得者層と高所得者層では、貯蓄行動で顕著な構造的差違があるのかもしれない。もし、両者の行動に著しい差があると判断されるならば、与えられた全てのデータについて単一方程式で係数を推定しても、その係数の信頼性は極めて低いものとなる。2つのデータグループの間に構造的な差違、つまり構造変化

があるか否かを検討するために、形式的には(16)式ないしは(17)式が用いられる。図3において、2つのグループに制約条件を与えずに構造的な差違があると考えられるならば、2つの回帰方程式

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{X}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \mathbf{u} \quad (18)$$

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2), \quad \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 & X_{11} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_{1n_1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 & X_{21} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_{2n_2} \end{pmatrix}, \quad n = n_1 + n_2$$

であらわされ、2つのグループ間に差違がないという仮定のもとでは、

$$\text{仮説 } H_0 : \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \mathbf{u} \quad (19)$$

となる。(19)式を回帰分析した残差自乗和を  $\mathbf{e}'_* \mathbf{e}_*$ 、(18)式を回帰分析した2つのグループの残差自乗和の合計を  $\mathbf{e}' \mathbf{e}$  とすると、(17)式の適用は

$$F = \frac{(\mathbf{e}'_* \mathbf{e}_* - \mathbf{e}' \mathbf{e})/2}{\mathbf{e}' \mathbf{e} / (n-4)} \quad (17')$$

となる。(17)'式は、構造的差違を仮定したことによって失われる説明力と構造的差違を前提とした2つの回帰式の残差自乗和の合計との比で、構造的差違の有無の判断指標としている。同じテストを(16)式の制約条件  $\mathbf{R}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{r}$  のもとで行うならば、仮説  $H_0$  は

$$H_0 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。(18)、(19)式の場合、回帰式の切片と傾きを一緒にして構造的差違を検討することになるが、制約条件を変えることによって個々の係数の構造的差違を検討することも可能である。また、説明変数が2個以上の場合、グループが3つ以上の場合にこのテストを拡張することができる。一般的には、 $n$ 個のデー

データを  $k$  個のグループに分けて、 $n$  個のデータにもとづく被説明変数と説明変数との関係が線型関係とみなしうるかどうかを検討することになる。構造的差違の検討は、クロスセクション分析に限らず、時系列データを用いて異なった時期の構造変化の有無の判断材料として使用される (Chow [6])。構造変化の問題は、データを機械的に分割するのではなく、現実経済に対する認識の問題にかかわる。

### Ⅲ-4 均一分散性のテスト

$n$  個の標本にわたって線型回帰方程式の分散が均一であるかの検討は、大別して2つの方法に分けられる。第1は、標本を被説明変数あるいは重要な説明変数のスケールに応じていくつかのグループに分割し、残差分散が均一であるかどうかの検討を行っているもので、Kendall and Stuart [17], Goldfeld and Quandt [11] 等がある。第2は、不均一分散性が存在すると判断された場合、回帰分析の残差自乗がどのような要因から影響を受けているのか、特に説明変数とどのような関数関係にあるのかを検討する。不均一分散の性質にかかわるテストは、Breusch and Pagan [3], Glesjer [10] 等がある。ここでは分散の均一性自体に検討を行っている前者2つの研究について考察する。Kendall and Stuart の研究は、データのグループを  $m$  に分割し、各グループの分散が等しいとみなしうるか否か、つまり

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_m^2$$

を検討している。まず、グループ内の標本分散

$$S_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2}{n_i - 1} ; i = 1, \dots, m$$

$$\bar{Y}_i = \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} / n_i$$

および、グループ全体の標本分散

$$S^2 = \sum_{i=1}^m (n_i - 1) S_i^2 / (n - m)$$

を計算する。そして統計量



$$Q' = (n-m) \ln S^2 - \sum_{i=1}^m (n_i - 1) \ln S_i^2 \quad (20)$$

が近似的に自由度  $(m-1)$  のカイ自乗分布にしたがうことを利用する<sup>15)</sup>。それぞれのグループの標本分散が標本全体の分散に近い値をとり大きな差違がなければ、 $Q'$  は小さな値をとるが、グループの標本に大きな差違があれば、 $Q'$  は大きな値をとる。 $Q'$  の大小によって分散が均一であることの妥当性を見る一つの目安となりうる。

Goldfeld and Quandt の研究は、2つのグループの分散の均一性  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$  を検討している。不均一分散の疑いがある説明変数  $X_i$  を選び、 $X_i$  のスケールに応じて観察値を並べる。中心の  $c$  個の観察値を除外し、残った最初の  $(n-c)/2$  個の観察値、最後の  $(n-c)/2$  個の観察値にそれぞれ最小自乗法を適用する。そして、小さな  $X_i$  の組の回帰分析から得られた残差自乗和を  $RSS_1$ 、大きな  $X_i$  の組の回帰分析から得られた残差自乗和を  $RSS_2$  とすると、仮説  $H_0$  が真という仮定のもとでは、統計量

$$F = \frac{RSS_2}{RSS_1}$$

が自由度対  $((n-c-2k)/2, (n-c-2k)/2)$  の  $F$  分布にしたがうことを利用する。仮説  $H_0$  が妥当性を持っているならば、すなわち2つのグループの残差自乗和に差がなければ、 $F$  は1に近い値をとる。 $RSS_2$  が  $RSS_1$  に比してかなり大きくなれば、 $F$  は1よりかなり大きくなり仮説  $H_0$  の妥当性は疑しくなる。

### III-5 系列相関のテスト

系列相関の有無についての検討は、大別して一次の系列相関テストと高次の系列相関テストに分けられる。前者として Durbin and Watson [9] の研究、後者として Breusch [2], Goldfrey [12] の研究を考察する。

Durbin-Watson 統計量は

$$d = \frac{\sum_{t=2}^n (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n e_t^2} \quad (21)$$

で定義される。(2)の右辺を展開し、 $\sum_{t=2}^n e_t^2$ ,  $\sum_{t=2}^n e_{t-1}^2$ ,  $\sum_{t=1}^n e_t^2$  をほぼ等しいとみなすと、

$$d \approx 2(1-\rho) \tag{2}$$

が得られる。ここで、 $\rho = \sum e_t e_{t-1} / \sum e_t^2$  は一次の系列相関係数の推定値である。(2)式より  $-1 < \rho < 1$  に応じて  $d$  は 0 から 4 の範囲の値をとりうる。 $\rho > 0$  のときは  $d < 2$  であり、 $\rho$  が 1 に近づくにつれて  $d$  は 0 に近づく。 $\rho < 0$  のときは  $d > 2$  であり、 $\rho$  が  $-1$  に近づくにつれて  $d$  は 4 に近づく。また、系列相関係数値  $\rho$  が 0 のときは  $d = 2$  となる。(2)式の関係から  $d$  の値を調べることによって、系列相関の程度を判断することができる。

Breusch and Goldfrey による 高次の系列相関を検定するための帰無仮説は  $H_0: \mathbf{u} \sim N(\mathbf{0}, \sigma_u^2 \mathbf{I})$  である。まず、 $\mathbf{y}$  を  $\mathbf{X}$  上に回帰して残差  $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{b}$  を求める。次に残差  $\mathbf{e}$  を  $[\mathbf{E}_p \ \mathbf{X}]$  上に回帰する。

ここで、

$$\mathbf{E}_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ e_1 & 0 & \cdots & 0 \\ e_2 & e_1 & \cdots & 0 \\ e_3 & e_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & e_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & e_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e_{n-1} & e_{n-2} & \cdots & e_{n-p} \end{pmatrix}$$

残差  $\mathbf{e}$  を  $[\mathbf{E}_p \ \mathbf{X}]$  上に回帰したことにより説明される部分を  $ESS$  とすると、

$$ESS = \mathbf{e}' \mathbf{E}_p [\mathbf{E}_p' \mathbf{E}_p - \mathbf{E}_p' \mathbf{X} (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{E}_p]^{-1} \mathbf{E}_p' \mathbf{e}$$

となるが、<sup>16)</sup> 仮説  $H_0$  が真のもとでは、

$$l = \frac{ESS}{\mathbf{e}' \mathbf{e} / n}$$

は近似的に自由度  $p$  のカイ自乗分布にしたがうことが確かめられる。ところで、この回帰からの決定係数を  $R_e^2$  とすると、

$$R_e^2 = ESS / \mathbf{e}' \mathbf{e}$$

したがって、 $l = n R_e^2$  が導かれる。すなわち、仮説  $H_0$  の妥当性が強ければ、

ラグ付変数  $E_p$  による  $e$  の説明力  $R_e^2$  は 0 に近く、仮説  $H_0$  の妥当性が疑わしければ、ラグ付変数  $E_p$  による  $e$  の説明力  $R_e^2$  は高くなる。

われわれは、Ⅱの線型回帰モデルの推定結果の評価および諸仮定 A-2, A-3 の妥当性について通常用いられている検定統計量が、確率誤差項の仮定なしでも意味づけできることを明らかにした。Ⅱで述べた諸問題をどのように解決するかは、モデル選択のうえでも重要な作業である。次節では、検定段階で問題となった推定結果をどのような方法で再推定して推定上の問題を回避しうるかを検討した後、実際の検定段階で生じうるモデル選択の問題を考察する。

- 8) 線型回帰モデル(2)において、説明変数行列を  $\mathbf{X}=(\mathbf{x}_i \ \mathbf{X}_i)$  に分割し、説明変数ベクトル  $\mathbf{x}_i$  を含む回帰方程式からの決定係数を  $R_*^2$ 、説明変数  $\mathbf{x}_i$  を含まない回帰方程式からの決定係数を  $R^2$  とすると、

$$R_*^2 - R^2 = \frac{(\mathbf{y}'\mathbf{M}\mathbf{x})^2}{(\mathbf{x}_i'\mathbf{M}\mathbf{x}_i)(\mathbf{y}'\mathbf{y})} \geq 0$$

が得られる。ここで、 $\mathbf{M}=\mathbf{I}-\mathbf{X}_i(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\mathbf{X}_i'$  のベキ等行列である。

- 9) 注8)での記号を用いると、

$$b_i = \frac{\mathbf{y}'\mathbf{M}\mathbf{x}_i}{\mathbf{x}_i'\mathbf{M}\mathbf{x}_i}, \quad s^2 = \frac{e'e}{n-k}, \quad a_{ii} = (\mathbf{x}_i'\mathbf{M}\mathbf{x}_i)^{-1}$$

が得られるから、(14)式は

$$t_i = \frac{(\mathbf{y}'\mathbf{M}\mathbf{x})\sqrt{n-k}}{(\mathbf{y}'\mathbf{M}_*\mathbf{y})^{\frac{1}{2}}(\mathbf{x}_i'\mathbf{M}\mathbf{x}_i)^{\frac{1}{2}}} \quad (14')$$

となる。ここで、 $\mathbf{M}_*=\mathbf{I}-\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$

- 10)  $\mathbf{y}$  と  $\mathbf{x}_i$  の偏相関係数を  $r_i$  とすると、

$$r_i = \frac{\mathbf{y}'\mathbf{M}\mathbf{x}_i}{(\mathbf{y}'\mathbf{M}\mathbf{y})^{\frac{1}{2}}(\mathbf{x}_i'\mathbf{M}\mathbf{x}_i)^{\frac{1}{2}}}$$

であらわされるから、注9)の(14')式を用いると、

$$r_i^2 = \frac{t_i^2}{t_i^2 + (n-k)}$$

が得られ、(15)式のように書き直すことができる。また、(15)式を  $r_i$  について微分すると、

$$\frac{dt_i}{dr_i^2} = \frac{\sqrt{n-k}(1+r_i^2)}{(1-r_i^2)^{\frac{3}{2}}} > 0$$

となる。

- 11)  $RSS=\mathbf{y}'\mathbf{M}\mathbf{y}$

$$RSS_t = \mathbf{y}' \mathbf{M}_* \mathbf{y} = \mathbf{y}' \mathbf{M} \mathbf{y} - \frac{(\mathbf{y}' \mathbf{M} \mathbf{x}_t)^2}{\mathbf{x}_t' \mathbf{M} \mathbf{x}_t}$$

より

$$r_t^2 = \frac{RSS - RSS_t}{RSS}$$

が導かれる。したがって、(15)式が成立する。

- 12) 説明変数  $\mathbf{x}_t$  を含む回帰方程式からの自由度修正済みの決定係数を  $\bar{R}_*^2$ , 説明変数  $\mathbf{x}_t$  を含まない回帰方程式からの自由度修正済み決定係数を  $\bar{R}^2$  とすると,

$$\bar{R}_*^2 = 1 - \frac{RSS_t / (n-k)}{\mathbf{y}' \mathbf{y} / (n-1)}$$

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{RSS / (n-k+1)}{\mathbf{y}' \mathbf{y} / (n-1)}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \bar{R}_*^2 - \bar{R}^2 &= \frac{1}{\mathbf{y}' \mathbf{y} / (n-1)} \left( \frac{RSS}{n-k+1} - \frac{RSS_t}{n-k} \right) \\ &= \frac{(\mathbf{y}' \mathbf{M}_* \mathbf{y})(n-1)}{(\mathbf{y}' \mathbf{y})(n-k+1)(n-k)} (t_i^2 - 1) \end{aligned}$$

が得られ、 $t_i^2 > 1$  のとき  $\bar{R}_*^2 > \bar{R}^2$  が確かめられる。Edwards [8] 参照。

- 13) 制約条件  $\mathbf{R}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{r}$  のもとでの最小自乗推定量を  $\mathbf{b}_*$  とすると,

$$\mathbf{b}_* = \mathbf{b} + (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{R}' [\mathbf{R}(\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{R}]^{-1} (\mathbf{r} - \mathbf{R}\mathbf{b})$$

が得られる。

$$\mathbf{e}_* = \mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{b}_* = \mathbf{e} - \mathbf{X}(\mathbf{b}_* - \mathbf{b})$$

であるから,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_*' \mathbf{e}_* - \mathbf{e}' \mathbf{e} &= (\mathbf{b}_* - \mathbf{b})' \mathbf{X}' \mathbf{X} (\mathbf{b}_* - \mathbf{b}) \\ &= (\mathbf{r} - \mathbf{R}\mathbf{b})' [\mathbf{R}(\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{R}]^{-1} (\mathbf{r} - \mathbf{R}\mathbf{b}) \end{aligned}$$

となる。したがって、(16)式は(17)式で書きあらわすことができる。Johnston, 前掲書 p. 204-207 参照。

- 14) Johnston, 前掲書 p. 186-187 参照。

- 15) 実際の検定では、 $Q'$  にスケールの調整が行われ、 $Q = \frac{Q'}{C}$  なる統計量がいられる。ここで,

$$c = 1 + \frac{1}{3(m-1)} \left( \sum_{i=1}^m \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n_i-1} \right).$$

- 16)  $\mathbf{e}$  を  $[\mathbf{E}_p, \mathbf{X}]$  上に回帰しているけれども、 $\mathbf{e}' \mathbf{X} = 0$  であるため  $ESS$  が得られる。その結果、 $ESS$  は  $\mathbf{X}$  の変動を除いた  $\mathbf{E}_p$  で  $\mathbf{e}$  を説明できる部分としてあらわされている。

#### IV. モデルの選択にかかわる諸問題

##### IV-1 推定方法の変更

説明変数間の相関係数と最小自乗推定値の  $t$  検定統計量とから、説明変数間に多重共線関係による問題の疑いが強い場合には、II-4の最後で述べた方法<sup>17)</sup>にもとづく再推計が考えられる。その他の方法の一例として、Hoerl and Kennard [14] によるリッジ回帰が用いられることがある。リッジ回帰推定量は、

$$\mathbf{b}_R = (\mathbf{X}'\mathbf{X} + c\mathbf{I})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \quad (23)$$

で与えられる。ここで、 $c$  は任意の定数をあらわすが、未知であるため、実際の回帰において平均自乗誤差 (Mean Square Error) を最小にするように  $c$  を選ぶ方法がとられる。(23)式の推定量を用いると確かに多重共線関係を弱めることはできるが、平均誤差分散最小という基準があるとはいえ、係数でデータを調整することになり、推定量の解釈をすることが困難な点で問題がある。

時系列データにおいて、ある時期から標本期間内で生じていると判断される場合には、推定期間の時期を区分して再推計する必要がある。あるいは、単一方程式で推計を試みるならば、ダミー変数を用いての推計方法も考えられる。最も重要なことは、構造変化がいつ頃から生じたかを機械的に検定を行った結果決めるのではなくて、分析者の現実経済に対する認識を通して判断されるべきである。同様なことが、標本期間の決定、およびクロスセクションデータによる構造的差違の分析にもあてはまり、構造変化テストは判断材料の一部にすぎない。

III-4で述べたテストにより不均一分散性が生じていると判断された場合には、2つの再推計方法が考えられる。第1は、分散が均一と考えられるグループにデータを分け、グループごとの標本分散を用いて一般化最小自乗法 (Generalized Least-Squares Estimation Method) を適用する方法である。第2に、不均一分散の原因となる要因が説明変数  $X_{jt}$  にあるとすれば、誤差分散と説明変数の関

係を推定し、最初のモデルを変形する。例えば、 $e_t^2 = cX_{jt}^2$  ( $c$ は定数)なる関係があったとすれば、関係式

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{1t} + \cdots + \beta_j X_{jt} + \cdots + \beta_k X_{kt}$$

の両辺を  $X_{jt}$  で割り、最小自乗法により係数を推定すれば、

$$\left(\frac{Y_t}{X_{jt}}\right) = \hat{\beta}_1 \left(\frac{1}{X_{jt}}\right) + \hat{\beta}_2 \left(\frac{X_{1t}}{X_{jt}}\right) + \cdots + \hat{\beta}_j + \cdots + \hat{\beta}_k \left(\frac{X_{kt}}{X_{jt}}\right) + e_t'$$

なる関係が得られ、 $e_t'$  は  $\frac{e_t}{X_{jt}} = \sqrt{c}$  により不均一分散性が除去された誤差とみなしうる。

一次の系列相関が存在すると判断される場合には、最初の線型回帰式のトレンドを除去するために、被説明変数・説明変数の階差あるいは変化率の形式に変形する方法が考えられる。また、一次の系列相関には、Cochrane and Orcutt [5] による方法がよく用いられる。

#### IV-2 モデルの選択にかかわる諸問題

計量モデル分析において、いくつかの仮説・理論のうち最終的に採用するモデルの選択基準を何におくべきかについては、従来より多くの議論がなされてきた。<sup>18)</sup> 主要な指標の1つとして自由度修正済みの決定係数  $\bar{R}^2$ 、あるいは  $\bar{R}^2$  に類似した統計量の提示もなされている。そのさい、単に  $\bar{R}^2$  だけでなくⅢで述べた検定統計量による検討を行う必要がある。そして、必要であればⅣ-1のような方法での再推計も考慮されるべきである。

確率誤差項の仮定のもとでは、それぞれの検定統計量に対して、特定の有意水準に対応する棄却域が求まるから、具体的判定基準が明らかでメリットがある。経済理論とのかかわりを除外すれば、推定結果がすべての検定基準にパスして  $\bar{R}^2$  等の大ききでモデルの優劣を判断することが厳密な意味では必要であろう。実際にしばしば起こる問題は、再推計を行っても検定基準の少なくとも1つを満たさない場合、どのようにしてモデルの選択を行うかである。モデル選択が不可能であると結論づけるか、いくつかの検定から明らかな問題を無視してモデルの選択を行うかである。実際の計量モデル分析では、少なくとも検

定基準のいくつかを満たさない場合でもモデルを選択することが少なくない。そのさい、モデルの選択を行う分析者は、検定基準より強い選択基準を有していることになる。例えば、複数の説明変数のモデルにおいて、採用された推定式の係数推定値は、すべて符号条件を満たしているけれども、1つの係数の  $t$  値が1以下で有意性が低かったとしよう。有意性が低いにもかかわらず、分析者がこの変数を説明変数として採用したのは、恐らく経済理論的に重要な変数だと考えたからであろう。有意性が低い原因として、多重共線関係によるのかもしれないし、問題の説明変数のデータ自体が被説明変数の変動をほとんどとらえていなかったからかもしれない。その説明変数と被説明変数のデータをプロットしてみて関係がみられず単相関係数が著しく低い場合には、データのとり方を検討するか、仮説自体を検討する必要があるのかもしれない。原因が多重共線関係の存在にあり、問題の説明変数と他の説明変数であるラグ付き被説明変数とに強い相関があったため生じた推定結果であるとしよう。このような状況のもとでは、モデルのかなりの部分を被説明変数のラグで説明してしまうことがしばしばあり、分布ラグモデルあるいは時系列モデルを念頭にするのでない限り理論的観点からはモデルの説明力は弱いといわざるを得ない。もし、多重共線関係を回避するためにラグ付き被説明変数を説明変数から除外したら、 $\bar{R}^2$  が低くなるだけでなく、新たに系列相関の問題が生じるかもしれない。なぜなら、ラグ付き被説明変数の変動が説明されない残差  $e_t$  に含まれている可能性が高いからである。このように、いくつかの検定基準の間には使用されるデータの性質によってトレードオフが生じることがしばしばある。

すでに述べたように、線型回帰モデルにおいて、確率誤差項の仮定なしでもそれぞれの検定統計量は、推定誤差の分析を通して係数推定値の信頼性についての有意な分析を可能にしている。確率誤差項の仮定をはずすと特定の有意水準のもとでモデル選択のための絶対的線引き基準ができないことが難点である。検定統計量は、線型回帰モデルのあてはめの程度を測るいくつかの目安に役立っているとみなして、モデル選択を行うための絶対的な線引き基準を設定しなくてもいいのではないだろうか。仮説検定の絶対的基準を重視してモデル

選択を行うことによって、推定結果を求めたプロセス、選択したモデルの経済理論的内容が不明である方がむしろ問題である。計量モデル分析において最も重要なことは、いくつかの推定結果からどのような基準であるモデルが選択されたかのプロセスを、経済理論とのかかわりで明らかにしておくことであると考える。

- 17) Chamberlain and Leamer [4], Leamer [17] は、ベイジアンからのアプローチで多重共線関係の存在の可能性を検討している。
- 18) Amemiya [1] Chap. 2, Chow [7] Chap. 9 は、モデル選択にかかわる諸統計量をめぐる最近の分析を行っているが、その多くは本稿の対象を越えている。
- 19) Theil [22] p. 213 が提案している  $\tilde{R}^2$  は、 $\tilde{R}^2 = 1 + \frac{n+k}{n-k} R^2$  で定義され、つねに  $\tilde{R}^2 < \bar{R}^2$  が成立する。また、第  $i$  説明変数を含む  $\tilde{R}^2$  は、第  $i$  説明変数の係数推定値の  $t$  値が  $t_i > \frac{2n}{n+k} \left( 1 < \frac{2n}{n+k} < 2 \right)$  のとき第  $i$  説明変数を含まない  $\tilde{R}^2$  より大きくなるから、説明変数増加に対して  $\bar{R}^2$  より厳しい基準であるといえる。

#### 参考文献

- [1] Amemiya, T., *Advanced Econometrics*, Basil Blackwell, 1985.
- [2] Breusch, T. S., "Testing for Autocorrelation in Dynamic Linear Models," *American Economic Papers*, vol. 17, 1978, pp. 334-35.
- [3] ————— and Pagan, A. R., "A Simple Test for Heteroscedasticity and Random Coefficient Variation," *Econometrica*, vol. 47, 1979, pp. 1287-94.
- [4] Chamberlain, J. S. and Leamer, E., "Matrix Weighted Averages and Posterior Bounds," *Journal of the Royal Statistical Society*, Ser. B38, 1976, pp. 73-84.
- [5] Cochrane, D. and Orcutt, G. H., "Application of Least Squares Regressions to Relationships Containing Autocorrelated Error Terms," *Journal of the American Statistical Association*, vol. 44, 1969, pp. 32-61.
- [6] Chow, G. C., "Tests of Equality Between Sets of Coefficients in Two Linear Regressions," *Econometrica*, Vol. 28, 1960, pp. 591-605.
- [7] —————, *Econometrics*, McGraw-Hill, 1983.
- [8] Edwards, J. B., "The Relationship Between the  $F$  test and  $\bar{R}^2$ ," *American Statistician*, vol. 23, pp. 28.
- [9] Durbin, J. and Watson, G. S., "Testing for Serial Correlation in Least



- Squares Regression," *Biometrika*, vol. 37, 1950, pp. 409-28.
- [10] Glesjer, H., "A New Test for Heteroscedasticity," *Journal of the American Statistical Association*, vol. 64, 1969, pp. 316-23.
- [11] Goldfeld, S. M. and Quandt, R. E., "Some Test for Homoscedasticity," *Journal of the American Statistical Association*, vol. 60, 1965, pp. 539-47.
- [12] Goldfrey, L. G., "Testing Against General Autoregressive and Moving Average Error Models when the Regressors Include Lagged Dependent Variables," *Econometrica*, vol. 46, 1978, pp. 1293-1302.
- [13] 久本久男「計量モデルとシミュレーション」(置塩・野沢編『日本経済の数量分析』第7章, 大月書店, 1983年, 所収)。
- [14] Hoerl, A. E. and Kennard, R. W., "Ridge Regression: Biased Estimation for Non-Orthogonal Problems," *Technometrics*, 1970, pp. 55-68.
- [15] Johnston, J., *Econometric Methods* 3rd ed, McGraw-Hill, 1984.
- [16] 経済統計学会編「社会科学としての統計学」, 『統計学』第49・50合併号, 1986.
- [17] Kendall, M. G. and Stuart, A., *The Advanced Theory of Statistics*, vol. 2, Griffin London, 1961, pp. 234-36.
- [18] Leamer, E. E., "Multicollinearity: A Besian Interpretation," *Review of Economics and Statistics*, 1973, vol. 55, pp. 371-80.
- [19] Pierce, D. A., "Relationships and the Lack Thereof Between Economic Time Series, with Special Reference to Money and Interest Rates," *Journal of American Statistical Association*, vol. 72, 1977, pp. 11-21.
- [20] 佐和隆光『数量経済分析の基礎』, 筑摩書房, 1979年。
- [21] Sims, C. A., "Money, Income, and Causality," *American Economic Review*, vol. 62, 1972, pp. 540-52.
- [22] Theil, H., *Economic Forecast and Policy* 2d ed., North-Holland Publishing, 1961.