共同研究会

昭和四八年度第七回研究会（十一月二日）

▼テーマ「虚偽の社会的価値」の理論的根拠

——井上晴丸教授の所説にふれて——

報告者　内山　昭氏

（報告要旨は本号研究の項に掲載）

昭和四八年度第八回研究会（十二月七日）

▼テーマ　経済学研究四十年をふりかえって

報告者　建林正喜氏

（報告要旨は三・四合併号に掲載）

昭和四八年度第九回研究会（一月十八日）

▼テーマ　トポロジーとは

報告者　荒井正治氏

報告要旨

一、報告までのいきさつ（略）

二、位相幾何学とは

1、ユークリッド幾何学の特性は図形そのものというよりむしろ図形のとらえ方にある。とらえ方とは例の合同概念のことである。その基底には「許される変化・運動」の概念がある。それは直観的には剛体の運動である。即ち、図形Ａがあたかも剛体の如くに運動して図形Ｂに重なり合う時、両者は「同じ」であると見なし、合同とよぶ。そして、それら合同なるものに共通な性質を研究するのがユークリッド幾何学である。そこにおいては、図形の書かれている位置やそれを構成する物質等々は捨象され、長さ、角度、面積等々の概念が残る。

「許される変化・運動」を〝直観的には剛体の運動〟と述べておいたが、厳密には〝長さを変えない変換〟というべきである。前の規定においては、右手と左手は合同とはよべないが、後者の規定によって、合同とよべるようになる。

2、トポロジー（位相幾何学）とは、この「許される変形」として、直観的には軟体的な伸縮自在の変形（但し切貼禁止）を採用する幾何学である。ここにおいては、長さ、角度、面積等の概念は破壊され、ドーナツとコーヒー茶碗は「同じ」と見なされる。

図1の図形はこの観点から見てすべて「同じ」＝位相同型

である。それらに共通な性質としては、①一続きの図形であること　②孔が二つあいていること、が見てとれる。又、交通機関に掲示の地図は、あまりにも変形されているにもかかわらず、我々はそこから正しい情報を得ることができる。例えば二つの路線の分岐点（＝合流点）。

一筆書きというパズルがある。これは図形に関する問題であるから幾何学である。その図形が針金でできていると思って、変形しても、一筆書きの問題としては変らないから位相幾何学的範疇に入る。本質的なものは線と線との交りである。

「許される変化」として、前には〝伸縮自在〟と述べておいたが、厳密には「双連続変換」（後述）として規定される。図2の両図形は、前者の意味では互いに移りえないが（各自実験せよ）、実は後者の意味では移りえて、位相同型であることが証明される。後者の概念をも包摂する直観的説明は次のとおりである。切ることは許すが（破線L）最後には元どおりに貼り合わせておかねばならない（破線L'）。

或変換において、二点P、P'が近くにある時、その移った点Q、Q'もまた近くにある時この変換を連続変換とよぶ。この変換を逆に戻すことが一意的に可能であり、更にこの逆も

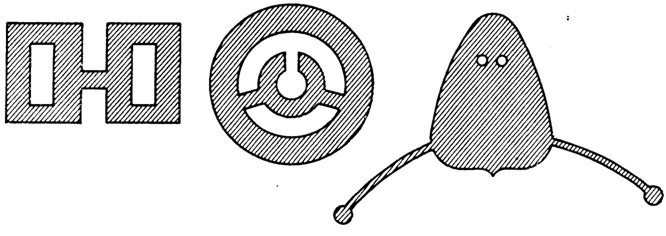

図 1

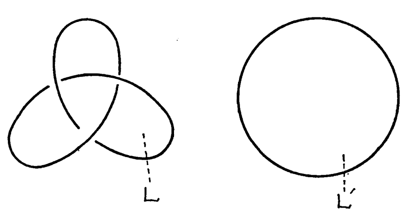

図2

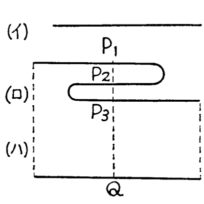

図3

また連続であるときこの変換を双連続変換（=位相的変換）という。例えば、図3の様に、一本のゴム紐(イ)を伸ばしたり縮めたりして(ロ)にする変形は双連続的であるが、それを上から押し潰して(ハ)にする変形は連続ではあるが双連続ではない。実際、点Qを元へ戻すにはP_1、P_2、P_3のうちのどれにしてよいか定まらず、逆は一意的ではない。

以上まとめると次の様にいえる——位相幾何学とは双連続変換によっては不変な性質を研究する幾何学である。

そして、近さ、近づく=極限、連続等の概念がこの理論の基幹となる。

三、史的スケッチ

位相幾何学は、ここ百年余の産物であるといえる。ただし、それ以前においても Euler の多面体定理（後述）のような、後の体系的な発展の中にその占めるべき位置を見いだされることとなる二、三の孤峰が存在したことは勿論である。

Euler や Möbius によって受胎され、複素変数の代数関数の奥深い性質が位相幾何学的構造と一体であることを見てとった Riemann (1826-1866) の大理論体体系と、Poincaré (1854-1912) の「天体力学」における諸考察によって高らかに産ぶ声をあげた位相幾何学は、その時同時に、自己の重要性を人々の頭の中にたたきこんだ。この若い学問が、厳密な表現形式を獲得したのは今世紀初めにおいてであった。それは今世紀初頭の数学全般にわたる「公理化」の嵐と軌を一にしていた。ここに〝糊とハサミ〟の時代は終りを告げる訳であるが、素人にとって、〝糊とハサミ〟の方が親しみやすいことには変りはない。

四、二つの問題

1、Euler は、一七五二年次の様な美しい定理を発見した。

どの様な多面体においても、

面の数−辺の数+頂点の数=2

が成立つ。

証明のアイディアは次の通りである。多面体は内部がつまっていず、薄いゴム膜でできているものとする。それをふくませると球ができ（実は多面体の説明が不十分であった。図4の様な、ふくらませるとドーナツ型になるものなどは考えない）要するに、球面上に様々な線を描いたものが得られる。その一つの領域=面を破ってぐいと拡げて平面にする。この時面が一つ減るから

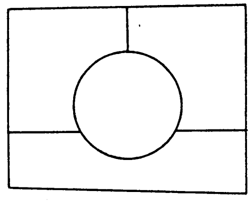

図4

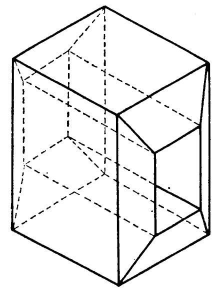

図5

$$面-辺+頂点=1$$

を証明すればよいこととなる。この平面図形の端から順次面を取り去っていっても、（その時当然いくつかの辺と頂点も取去ることとなる）　$面-辺+頂点$　には変化がないことが簡単な考察でわかる。この操作を続けていけば結局一個の多角形が残るが、その時面は一個であり、辺と頂点の個数は等しい（昔懐しい植木算）。従って、$面-辺+頂点=1$を得て、Eulerの多面体定理の証明は完了する。

Euclidが、このことを証明する為にその著「原論」を書いたとまで言われる定理——正多面体は五種類あり、またこの五種に限る——に対してこの Euler の定理は新しい照明を与える。即ち、Euler の定理の簡単な応用により各面が同数の辺よりなり、各頂点に同数の辺が集っているような多面体（正多面体も当然この性質を持つが）は五種類しかない。

しかし、当然ながらこの五種類のそれぞれに対して正多面体があるかどうかは Euler の理論からはわからない。何故ならば、正多面体の定義には長さや合同の概念が含まれているが、位相幾何学においてはこれらの概念は捨象されているから、

2、「四色問題」の名で知られている有名な未解決の問題について述べよう。今平面をいくつかの領域に分割し、その各々を国、平面全体を地図と呼ぼう。隣接する国は異なる色で塗ることとする（但、頂点を共有する程度ならば同色でもよい）。この時、何色あれば十分か。図5に見るように4色は必要である。他方、5色以上必要な地図は未だ見つかっていない。そこで

どの様な地図でも4色あれば塗分け可能である

ことが予想されているが、まだ証明はされていない。少し譲歩して、5色で十分だということならば前述の Euler の定理を使って証明できる。たった一色の差は遼遠である。

この問題は地球儀の様な球面上の国分けにおいても考えられるが、この時は一点を破って拡げれば平面となり、逆に平面を包み込めば球面となり、平面上の問題と球面上の問題には差がない。

同じ問題はドーナツの表面においても考えることができる。実に驚くべきことには、ドーナツの場合には7色が必要にして十分なることが証明されている。

五、不動点定理

1、図形Xを連続的（必ずしも双連続である必要はない）に、しかし、その結果の図形はXの外へはみ出さないように変換しよう。この時、元と同じ処にとどまっている点の存在を保証する一群の定理を不動点定理という。

この変換fにより、点Pが点Qに移ったとしよう

$$Q=f(P)$$

不動点定理とは、方程式

$$f(P)=P$$

が解を持つことを保証するものであり、その意味において、数学において基本的な役割をはたす。

勿論この定理が、無条件にあらゆるXに対して成立つのではない。例えばXとして線分 $0<x<1$ を考え、その左端を固定して半分に縮める変形を考えてみよう。この時左端はXの外にあるから不動点は存在しない。又、二つの同心円に囲まれた部分をXとし、それを二円の共通の中心を軸として少し回転する変形を考えてみよう。この時にも不動点は存在しない。

2、一次元の場合、Xを両端を込めた線分とする。例えば$0\leqq x\leqq 1$。この時不動点定理が成立つ。実際その変換を $y=f(x)$ とする。$0\leqq f(0), f(1)\leqq 1$ に注意して、$y=f(x)$ と $y=x$ のグラフを一枚の図に書けば両者が交わることはすぐにわかる。この交点のx座標が $f(x)=x$ の解、即ち不動点である。

2、Xを円盤（周を込めた円）とする時にも不動点定理が成立つ。

この証明のアイデアは次の通りである。

今不動点が存在しないとして、変換の元の点Pと移った先の点Qとを矢印で結ぼう。仮定により長さ零の、従って方向を定めない矢印は一つもない。又、矢印の先は常に円盤X内にある。点Pを円周上を一回転させる時、矢印$\overrightarrow{PQ}$は何回転

するであろうか。それは一回転である。実際、円周上の各点Pに接ベクトルを引いてみよう。Pが円周上を一周する時この接ベクトルは一回転する。又、接ベクトルとベクトル$\overrightarrow{PQ}$は重なり合うことがない。即ち互いに追越し追抜かれることはない。従って両者の回転数は一致する。

次いで、点Pを円周のほんの内側を一周させてみよう。この時各$\overrightarrow{PQ}$は、Pが円周上にある時と大差がないから（変換の連続性）、その回転数も大きなちがいはない。しかるに回転数は整数であるから、この場合も回転数は1である。

この議論により、点Pのまわる道をしだいに縮めていく。遂には一点Oの近くをまわる道となる。ここにおいても回転数はやはり1である。

他方、この小さな道の上におけるベクトルは点Oにおけるベクトルにほぼ同じであり、従ってこの道に沿う$\overrightarrow{PQ}$の回転数は零である。

かくて我々は相互に矛盾する結論を得た。その源は各点に長さが零でないベクトル$\overrightarrow{PQ}$が定まるとしたこと、即ち不動点の非存在を仮定したことにある。かくて不動点は存在する。

3、右の二つの場合を含む一般的な定理が次の Brower の定理である。

Xを有限次元空間内の有界閉凸集合とする時、

XからXへの連続変換は不動点を持つ。

この定理の証明及びその経済学への応用については、例えば二階堂副包「現代経済学の数学的方法」（岩波書店）を見られたい。

4、ここで、劇的な一挿話を述べよう。

Poincaré はその後「Poincaré の最後の定理」でよばれることとなる一つの不動点定理に気付き、この定理を使えば天体力学における或問題が解決されることを証明した。しかし、肝心の「最後の定理」の方は証明出来ず、数年の努力の後に、自分の健康の衰えゆくことを自覚した彼は、一九一二年三月その定理を証明なしで発表し、その証明を後進の手にゆだねた。それからわずか四ヶ月後、七月一七日彼は不帰の客となった。その完全な証明が若冠二八才の Birkhoff の手によって発表されたのは、半年後、翌年一月のことであった。

5、Brower の定理は有限次元における理論であった。無限次元空間においても種々の不動点定理が考案されている。「無限次元空間」といえば非現実的な数学者の遊びと思われ

るかも知れないが、決してそうではない。その重要性の一端は次の例で示唆されよう。

Newton 以来の数理物理学の伝統は、或現象を解明する為には、まずその現象を支配する微分方程式を樹立し、しかる後にその方程式を解くというプロセスをふむ。

今、常微分方程式

$$(*)\qquad \frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

を考えよう。ここで未知なるものは関数 $y=y(x)$ である。これを解くことは、これを積分した

$$(**)\qquad y(x)=y(a)+\int_a^x f(x,y(x))dx$$

を解くことと同値である。さて、関数 $y(x)$ に対して新たな関数 $y(a)+\int_0^x f(x,y(x))dx$ を対応させる変換を考える——従来の変換においては、点Pに点Qを対応させる変換であったが、ここにおいては、関数に対して関数を対応させる変換である——。この変換の〃不動点〃が(**)の解、従って元の微分方程式の解である。

この様に、関数を点とみなすような「空間」を表象するならば、方程式(*)の考察は幾何学的イメージを獲得する。この様な関数を点とみなすような空間が実は無限次元空間を構成する。この空間において位相的考察が可能である為には、この空間における〃近さの概念——即ち二つの関数が近いというイメージ——が確立されねばならない訳であるが、これはアプリオリには定まらず、むしろ個々の問題に密着した〃近さ〃概念を必要とする。このことが位相概念の自立を促すと共に「関数解析」と呼ばれる分野を生み出し発展させていった。

▼本年度（昭和四八年四月以降四九年三月迄）会員が本誌以外に発表した業績は次のごとくである。

足立政男
　京の家訓と京都型ビジネス
　　《西陣グラフ》昭和四九年一月号
　信用第一主義の家訓
　　《西陣グラフ》昭和四九年二月号
　細々費節約の家訓
　　《西陣グラフ》昭和四九年三月号

大藪輝雄
　井上晴丸先生を偲ぶ

《経済》　昭和四八年十二月号

奥地　正

森林組合労務班の現状と当面する諸問題

《林業経済》　昭和四八年十一月号

小野一郎

社会主義経済論のＡＢＣ

《経済》　昭和四八年五月号

加藤睦夫

所得課税論

『国家と財政の理論』第二部第二章所収

青木書店　昭和四八年十二月

租税論

『現代財政学体系』第一巻所収

有斐閣　昭和四九年一月

高度成長期財政の構造

『新マルクス主義経済学講座』第四巻所収

有斐閣　昭和四九年三月

地方税改革の方途

《京都の自治》　第二号

後藤　靖

自由民権期の交詢社について

《日本史研究》　昭和四八年六月号

坂野光俊

現代ヨーロッパ財政

『現代財政学体系』第四巻所収

有斐閣　昭和四八年十一月

西ドイツのマーシャル化と通貨改革

《島・他編『現代危機の国際的展開』》所収

有斐閣　昭和四九年三月

戦後民主主義と自治体問題

《ほん》　第八九号

身動きとれぬ地方財政

《エコノミスト》　昭和四八年九月十八日号

生活守れぬ地方財政

《エコノミスト》　昭和四九年一月十五日号

連載「自治体の政治経済学」

第一回「序論・連載をはじめるにあたって」

（共同執筆）

《住民と自治》　昭和四九年一月号

第二回「住宅難と住宅の公共性」（共同執筆）

《住民と自治》　昭和四九年二月号

社会福祉をめぐる財政問題

《社会福祉研究》　第十四号

超過負担と補助金制度

《京都の自治》　第八号

関　弥三郎

家計と生活水準に関する統計

経済統計のグラフ化

《大橋・高木・大屋編『経済統計』所収

有斐閣　昭和四八年七月

島津秀典

マルクス主義経済学と国家の理論（共同執筆）

《小谷・吉岡・宮本編『国家と財政の理論』》所収

青木書店　昭和四八年十月

杉野圀明

諸資本の競争と資本破壊

《高木幸二郎編『再生産と産業循環』》所収

共同研究室

ミネルヴァ書房　昭和四八年十月

戸木田嘉久

現代日本の都市問題

講座『現代日本資本主義』第二巻所収

青木書店　昭和四八年五月

古典解説　マルクス「労働組合――その過去・現在・未来」

《学習の友》　昭和四八年五月～七月号

現代の反共主義・労資協調主義との闘争

《労働農民運動》　昭和四八年十月号

社会主義協会（向坂派）の「三池闘争」論批判

《経済》　昭和四八年十二月号・昭和四九年三月号