直線傾向線と季節指数の図的計算

関　弥　三　郎

一　統計値の図的計算

統計における図的方法（graphic method）の利用には、表現手段としての利用と計算手段としての利用の二つの場合がある。表現手段としての利用は、統計資料やその分析結果を視覚に訴えて直観的に概観させ、それの性質やそこに存在する法則性の認識を容易にし理解を助けるためであり、計算手段としての利用は、統計資料から種々の誘導統計値を計算しまたは経験値に対応する理論値を求める場合に、計算の労を省き時間を節約するためである。従来社会、経済統計においては誘導統計値の計算手段としての図的方法の利用は、累積度数図による中位数、四分位数等の計算と経過図表による時系列の傾向線の当嵌めが行われていた位で、あまり重要な役割は果し

ていなかった。そして中位数、四分位数の図的計算は理論的には正確な値が求められ、問題は作図の実際において生ずる誤差のみであるが、それよりも遙かに重要な時系列の傾向線の図的当嵌めは客観的基準を欠き、多分に主観的な近似値を与えるにすぎないのである。ところが一九五五年アスコビッツ（S. I. Askovitz）によって単純算術平均次いで最小自乗直線の当嵌めの図的計算の方法が発表されて以来、その原理を用いて平均偏差、幾何平均、度数分布の算術平均、ヂニの集中係数、移動平均、季節指数等の図的求め方が明らかにされたのである。[注] アスコビッツに始まるこれらの図的計算の方法は客観的な基準を有し理論的に正確な値を与えることができ、従って今後その発展が期待されると共に統計実務において大いに利用されるであろう。

しかし図的計算はいかに理論的に正確な値をもたらすにしても、実際上は多くの場合大なり小なり近似的な値を与え得るのみであって、その結果の精度はグラフの上に正確にあらわし得る資料値の桁数と、点と点を結んで行く場合の作図の正確さとによるのである。例えば資料値が5桁の数字の場合、用紙の大きさの都合からグラフの目盛には最初の3桁しか記入し得ないとすると、図表ではこの資料値はせいぜい最初の4桁しかあらわすことはできず、従って図的計算の結果は最初の3桁の精度を保証し得るにすぎないであろう。そしてまた、たとえ資料値の桁数が少くその全部をグラフの上に正確にあらわし得たとしても、人間の視覚によって線を引き点を打って計算して行くのであるから、計算的作図の過程で必然的に小誤差が発生し、計算を続けて行くに従ってそれが累積されることが多い。もっともこのような作図の誤差は、グラフの縦軸の目盛の間隔を適当に伸縮して資料値の点があまり接近しないようにし、また適宜検証方法を利用して修正することによって相当程度回避し縮減することができるが、根絶することは不可能と思われる。勿論これらのことは数値計算の場合でもいえるが、図的計

算においては正確にあらわし得る桁数が必然的に少くなり且つ作図の誤差が不可避であることが、この方法の精度を一般に低いものにしているのである。

このように図的計算は近似計算にすぎないのであるが、その迅速、簡易な点では数値計算よりも数等勝っており、経済、経営の実務家、研究者にとって非常に多い、必ずしも厳密な正確性は必要でなく、それよりも早く近似的な結果を得れば十分であり、また煩雑な計算の便が得難い時等に、この方法は非常に有用である。そしてまた図表のみが発表されておりその値がわからない場合にも、誘導統計値を計算し得る長所もある。そこでここではアスコビッツの方法による図的計算のうち、経済統計において特に利用度の高い直線傾向線と季節指数の求め方を説明しよう。その場合まずアスコビッツの方法の基礎である単純算術平均と移動平均の図的計算を知らねばならぬ。そして季節指数は12ヵ月移動平均法と連環比率法による場合のみを取扱うことにする。

〔注〕 これらは次の諸論文で発表された。

(1) Askovitz, S. I., "Rapid Method for Determining Mean Values and Areas Graphically", Science, 121 (1955), pp. 212-3, reprinted in Agricultural Engineering, 36 (1955), p. 673.

(2) ——, "Mean Rates of Change and Least Squares —Interpretations and Rapid Graphic Methods," Journal of Applied Physiology, 8 (1955), pp. 347-52.

(3) ——, "A Short-Cut Graphic Method for Fitting the Best Straight Line to a Series of Points According to the Criterion of Least Squares," Journal of the American Statistical Association, (1957), pp. 13-17.

(4) Mincer, J, "Applications of a New Graphic Method in Statistical Measurement," Journal of the American Statistical Association, (1957), pp. 472-478.

(1)は単純算術平均、(2)(3)は最小自乗直線の当嵌め、(4)は度数分布の算術平均、移動平均、12カ月移動平均法による季節指数等の計算方法を説明したものである。

二　単純算術平均

計算方法　n個の資料値の単純算術平均は次のようにして求めることができる。まず資料値を横軸に関して等間隔に作図し、その点を$A\ B\ C$……Nとし、横軸の間隔をsとする(第1図参照)。そしてAから出発して線分AB上を横軸に関して$\frac{s}{2}$だけ進み、その点をbとする。次にbからbC上を同様に$\frac{s}{2}$だけ進んでc点に行き、次にcDを$\frac{s}{2}$進んでd点に行く。以下これを繰返して行って最後に到達した点の縦座標が求める平均値である。

今の場合は最初の点Aから出発して右へ$\frac{s}{2}$づつ進んで行ったが、これを逆に最後の点Nから始めて左へ$\frac{s}{2}$づつ進んで行っても同じ結果が得られる。それは平均値は資料値を平均する順序に無関係であるからである。またこの平均点を通る垂線は、AからNまでのXの範囲（range）を二等分する。これらの関係を利用して図的計算の結果を検証することができる。

証明　以上の方法で得られた最後の点が平均値であることは、次のようにして証明することができる。今X軸の原点をAの横座標に移し、X軸の目盛の単位をsとすると、資料点$B\ C\ D$……の横座標は$1\ 2\ 3$……となり、補助点$b\ c\ d$……の横座標は$\frac{1}{2}\ 1\ 1\frac{1}{2}$……となる。従って線分$bB\ cC\ dD$……の横軸への正射影は$\frac{1}{2}\ 1\ 1\frac{1}{2}$……であり、補助点$b\ c\ d$……の横座標に等しく、また$Ab\ bc\ cd$……の横軸への正射影はいずれも$\frac{1}{2}$である。そこで補助点$b$は線分$AB$を$\frac{1}{2}:\frac{1}{2}=1:1$の比に内分し、$c$は$bC$を$\frac{1}{2}:1=1:2$の比に、また$d$は$cD$を$\frac{1}{2}:1\frac{1}{2}=$

1:3の比に内分するのであり、かくて最後の補助点（これの横座標は$\frac{n-1}{2}$）はそれが存在する線分を$\frac{1}{2}:\frac{n-1}{2}$=1:(n−1)の比に内分することになる。

そしてそれぞれの縦座標をy_1 y_2とする2点を結ぶ線分を$m:n$に内分する点の縦座標yは

$$y=\frac{ny_1+my_2}{m+n}$$

で求められる。今資料点ABC……の縦座標をy_A y_B y_C……、補助点b c d……の縦座標をy_b y_c y_d……であらわすと

$$y_b=\frac{y_A+y_B}{1+1}=\frac{y_A+y_B}{2} \qquad (1)$$

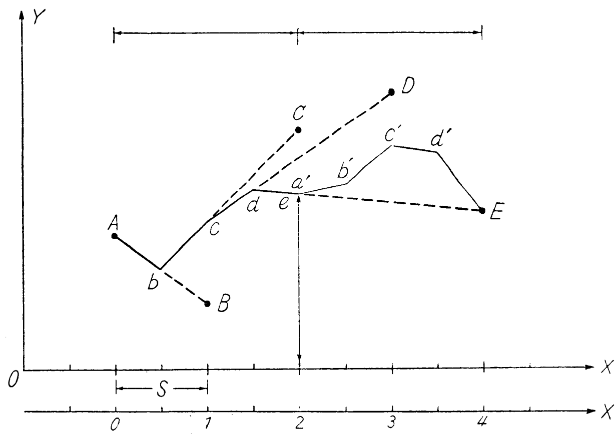
$$y_c=\frac{2y_b+y_C}{1+2}=\frac{y_A+y_B+y_C}{3} \qquad ((1)により) \qquad (2)$$

$$y_d=\frac{3y_c+y_D}{1+3}=\frac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4} \qquad ((2)により) \qquad (3)$$

であり、故にy_bは2個の資料値ABの平均、y_cは3個の資料値ABCの平均、y_dは4個の資料値$ABCD$の平均である。かくて最後の補助点の縦座標はn個の資料値の平均であることがわかる。

以上はAから右へ進んで平均を計算する場合であるが、次にNから左へ進んで計算する時は、X軸の原点をNの横座標に移しその左側にX軸の正の方向をとると、前と同様にして、Nから始め

第1図　単純算術平均の計算



て左へ$\frac{s}{2}$づつ進んで行った最後の補助点がn個の資料値の算術平均であることを証明することができる。

以上の証明の過程から明らかなように、この方法は2個の資料値の平均から始めて、順次資料値を1個づつ追加し、それと前の資料値の平均との加重平均を求めて行くことによって、最後に全部の資料値の平均を計算する連続的平均(successive averaging または advancing centroids)の方法であって、このために資料値の増減による平均の修正が容易に行える長所をもつのである。

資料値の増減による平均の修正　以上の方法で平均値を求めた後で、新らしい資料値を数個追加しまたは前の資料値を若干個除いた場合の平均が必要な時は、改めて平均計算を行わなくとも、前の平均値に追加ないしは削除せんとする資料値で修正計算を加えることによって、所要の平均値を求めることができる。

(a)　追加の場合　追加の資料値を続けて作図し、前の平均点から出発して新らしい資料点に向って$\frac{s}{2}$づつ右へ進んで行けばよく、最後に到達した点の縦座標は追加資料値を含む平均をあらわす。それはこの図的方法が連続的平均の方法であることから明らかであろう。

(b)　削除の場合　最初(左端)の数個の資料値を削除する時は、前の平均点と第一の削除点とを結ぶ線分を$\frac{s}{2}$だけ右へ延長し、次にその点と第二の削除点とを結ぶ線分を$\frac{s}{2}$右へ延長し、順次これを繰返して行って最後に得られた点の縦座標は残りの資料値の平均をあらわす。なぜならば、第1図の場合で説明すると、$ABCDE$の平均点eをEから始めて左へ$\frac{s}{2}$づつ進んで計算したものと考えると、Aを除いて$BCDE$の平均を得んとすればa'からb'へ戻ればよく、それには（a'が線分$b'A$上をb'から左へ$\frac{s}{2}$進んだ点であることから）Aa'を右へ$\frac{s}{2}$延長すればよいのであり、またBをも除いてCDEの平均を得んとすれば、更にb'からc'へ移ればよく、そ

れにはBb'を$\frac{s}{2}$右へ延長すればよいからである。

また最後（右端）の数個を除く時は、削除したい資料点と前の平均点とを結ぶ線分を$\frac{s}{2}$づつ左へ延長して行けばよいことは、以上のことから明らかであろう。

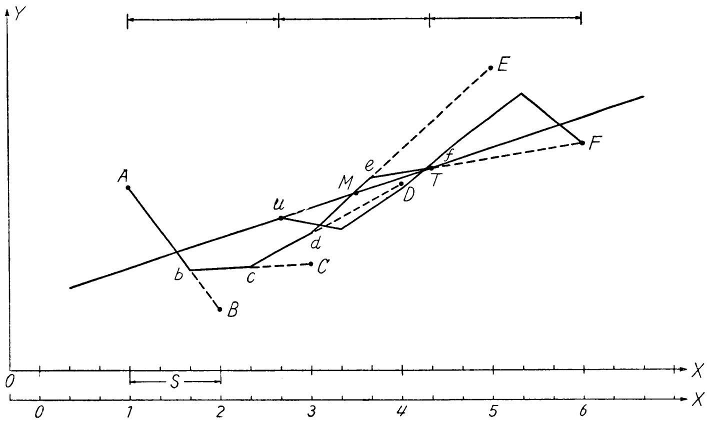
幾何平均　幾何平均は対数領域においては算術平均であることから、資料値を対数であらわしてそれを算術目盛のグラフに作図し（または資料値を直接半対数図表に描き）、以上の方法で算術平均を計算しその結果を真数に直すことによって、図的計算で幾何平均を求めることができる。

三　直線傾向線

計算方法　n個の項から成る時系列に最小自乗法によって当嵌めた直線傾向線は、次のようにして求めることができる。[注]すなわち、n個の資料値を横軸に関して等間隔に作図し、その点をABC……Nとし、また横軸の間隔をsとする。（第2図参照）まずAから出発して線分AB上を横軸に関して$\frac{2}{3}s$だけ進んでb点に行き、次にbからbC上を$\frac{2}{3}s$進んでc点に行く。そしてcからcD上を$\frac{2}{3}s$進んでd点に行く。以下これを繰返して行って最後に到達した点をTとする。次にこれとは逆にNから出発して左の方へ$\frac{2}{3}s$づつ進んで行き、最後に到達した点をuとする。このuとTを結ぶとn個の資料値に当嵌めた最小自乗直線が得られる。

この場合線分uTの中点Mの縦座標はn個の資料値の算術平均であるため、Aから出発して右へ（またはNから始めて左へ）$\frac{s}{2}$づつ進んで行き最後に到達した点はM点と一致し、また、u、Tを通る垂線はAからNまでのXの範囲を三等分する。これらの関係を用いて以上の図的計算の結果を検証することができる。

第2図　直線傾向線の当嵌め



そしてこのようにして得られた直線の方程式 $Y_c=a+bX$ は、適当な時点における直線上の点の縦座標をaの値とし、隣接2時点における直線上の点の縦座標の差をbの値とすることによって得られる。ただし、この方程式のXの原点はaの値を定めた時点にある。

〔注〕　相関系列においてXの値が等差級数をなす時はこの方法によって回帰直線を求めることができる。

証明　以上の方法の証明は次のようである。今X軸の原点をAの横座標の左側へsだけ離れたところに移し、X軸の目盛の単位をsとすると、資料点A B C D……の横座標は1 2 3 4……となり、補助点b c d……の横座標は $1\frac{2}{3}$ $2\frac{1}{3}$ 3……となる。従って線分bB cC dD……の横軸への正射影は $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ 1……であり、またAb bc cd……の横軸への正射影はどれも$\frac{2}{3}$である。そこで補助点bは線分ABを $\frac{2}{3}:\frac{1}{3}=2:1$ の比に内分し、従ってその縦座標 y_b は

$$y_b=\frac{y_A+2y_B}{3} \qquad (1)$$

であり、cはbCを $\frac{2}{3}:\frac{2}{3}=1:1$ の比に内分し、故にその縦座

標 y_c は

$$y_c=\frac{y_b+y_C}{2}=\frac{y_A+2y_B+3y_C}{6} \qquad \text{((1)により)} \qquad (2)$$

また d は cD を $\frac{2}{3}:1=2:3$ の比に内分し、かくて y_d は

$$y_d=\frac{3y_c+2y_D}{5}=\frac{y_A+2y_B+3y_C+4y_D}{10} \qquad \text{((2)により)} \qquad (3)$$

である。

他方、最小自乗法によって資料値 Y に直線 $Y_c=a+bX$ を当嵌める場合の正規方程式は

$$\text{I} \quad \sum Y=na+b\sum X$$

$$\text{II} \quad \sum XY=a\sum X+b\sum X^2$$

であり、II式から

$$\frac{\sum XY}{\sum X}=a+b\frac{\sum X^2}{\sum X} \qquad (4)$$

が得られ、これから X の値をウェイトとする X の加重平均 $\frac{\sum X^2}{\sum X}$ を横座標とし、Y の加重平均 $\frac{\sum XY}{\sum X}$ を縦座標とする点は最小自乗直線上にあることがわかる。従って与えられた時系列資料から $\frac{\sum X^2}{\sum X}$, $\frac{\sum XY}{\sum X}$ の値の組を2つ求め、その点を結べば最小自乗直線が得られるのである。

今の場合 n 個の資料点 $A\ B\ C\cdots\cdots N$ の X の値は $1\ 2\ 3\cdots\cdots n$ であるから

$$\frac{\sum X^2}{\sum X}=\frac{1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2}{1+2+\cdots\cdots+n}=\frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{\frac{n}{2}(n+1)}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}n \qquad (5)$$

で求められ、資料値が1個増加する毎に $\frac{\sum X^2}{\sum X}$ の値は $\frac{2}{3}$ づつ増加するのである。そして $\frac{\sum XY}{\sum X}$ の値は、まず資料点が AB 2個の場合は

$$\frac{\sum XY}{\sum X}=\frac{y_A+2y_B}{3}$$

であり、(1)式からこれは y_b に等しい。そしてこの場合は $n=2$ であるから(5)式より

$$\frac{\sum X^2}{\sum X}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times 2=1\frac{2}{3}$$

であり、かくてこの値の組は補助点 b に外ならない。次に資料点が ABC 3個の時は

$$\frac{\sum XY}{\sum X}=\frac{y_A+2y_B+3y_C}{6}$$

であり、(2)式からこれは y_c に等しく、$\frac{\sum X^2}{\sum X}$ は前の値に $\frac{2}{3}$ を加えた $2\frac{1}{3}$ であるから、この値の組は c 点である。また資料点が $ABCD$ の場合は

$$\frac{\sum XY}{\sum X}=\frac{y_A+2y_B+3y_C+4y_D}{10}$$

故に(3)式より y_d に等しく、$\frac{\sum X^2}{\sum X}$ は3になるから、これは d 点である。かくて A から出発して $\frac{2}{3}s$ づつ進んで行く時、最後に得られた補助点 T は n 個の資料値について計算した $\frac{\sum X^2}{\sum X}$、$\frac{\sum XY}{\sum X}$ の位置にあることがわかる。

次に X 軸の原点を時系列の最後の点 N の右側へ s だけ離れたところに移し、その左の方へ X 軸の正の方向をとると、以上と同様にして、N から出発して左へ $\frac{2}{3}s$ づつ進んで行って最後に得られる補助点 u は、n 個の資料値について求めた $\frac{\sum X^2}{\sum X}$、$\frac{\sum XY}{\sum X}$ の位置にあることがわかる。故に u と T を結ぶ線分は最小自乗直線を与える。

そして正規方程式Iから

$$\frac{\sum Y}{n}=a+b\frac{\sum X}{n} \tag{6}$$

が得られ、従ってXおよびYの平均を横座標および縦座標とする点はまた最小自乗直線上にある。今の場合

$$\frac{\sum X}{n}=\frac{1+2+\cdots\cdots+n}{n}=\frac{\frac{n}{2}(n+1)}{n}=\frac{n+1}{2}$$

であるから、$X=\frac{n+1}{2}$ に対応する最小自乗直線上の点の縦座標は n 個の資料値の平均を与えることになる。ところでTの横座標は(5)式から $\frac{2n+1}{3}$ であり、またX軸をTと同じにした場合の u の横座標は $\frac{n+2}{3}$ である〔注〕から、線分uTの中点の横座標は

$$\frac{1}{2}\left(\frac{n+2}{3}+\frac{2n+1}{3}\right)=\frac{n+1}{2}$$

となり、かくてuTの中点の縦座標はn個の資料値の平均をあらわす。

〔注〕 X軸の原点をNの右側に置く時のuの横座標は(5)式より $\frac{2n+1}{3}$ である。このX軸をTと同じにするには、$(n+1)$を引いて原点をAの左側に移し、また(-1)で割ってX軸の方向を変えればよい。従ってその場合のuの横座標は

$$\left\{\frac{2n+1}{3}-(n+1)\right\}\div(-1)=\frac{n+2}{3}$$

資料値の増減による直線の修正　　以上のようにして直線傾向線を当嵌めた後で資料値を増減する時は、平均計算の場合と同様、前の直線に修正計算を加えることによって新らしい傾向線を求めることができる。

(a) 追加の場合　　追加の資料値を続けて作図し、TおよびMから右の方へ新らしい資料点に向って$\frac{2}{3}s$および$\frac{s}{2}$づつ進んで行き、最後の点T'およびM'を結ぶと、追加資料値を含む最小自乗直線が得られる。それは先

の証明から容易にわかるように、T'は追加資料値をも含めて計算した$\frac{\sum X^2}{\sum X}$、$\frac{\sum XY}{\sum X}$の位置にあり、また算術平均の修正の項で述べたようにM'は追加資料値を含む平均をあらわし、そして両者は共に最小自乗直線の上にあるからである。

(b)　削除の場合　最初（左端）の数項を除く時は、uおよびMから右の方へ、削除せんとする資料点と結んで得られる線分を$\frac{2}{3}s$および$\frac{s}{2}$づつ延長して行き、最後の点u'およびM'を結べばよい。

また最後（右端）の数項を除く時は、TおよびMから左の方へ、除外せんとする資料点と結んで得られる線分を$\frac{2}{3}s$および$\frac{s}{2}$づつ延長して行き、最後の点T'とM'を結べばよい。

(c)　最近の資料を追加し古い資料を除く場合　追加の段階と削除の段階とに分けて(a)(b)の手続を行えばよい。今追加による修正を先に行うものとすると、まずTとMから右へ$\frac{2}{3}s$および$\frac{s}{2}$づつ進んで最後の点T'とM'を求め、次に線分$M'T'$を左へ延長して、追加資料点を含めた時のXの範囲の左から$\frac{1}{3}$の位置を通る垂線との交点をu'とする。そしてu'とM'とから右へ$\frac{2}{3}s$および$\frac{s}{2}$づつ進んで最後の点u''とM''を求め、両者を結べばよい。

以上のようにして容易に直線傾向線の修正を行うことができるのであるが、二点を結んで直線を求める場合その二点の間隔が短い時は誤差が生じ易いので、MとT（またはu）を結ぶよりもuとTを結んで直線を得る方がよく、そこで時系列の項数が多くない時は改めて計算を行った方がよい。そして修正計算の方法による時は、線分$M'T'$（または$u'M'$）からaとbの値を求めて方程式に直し、それを用いて直線を作図するとこのような誤差を回避することができる。

指数曲線　指数曲線は対数領域においては直線になることから、時系列資料値を対数であらわしそれを算

術目盛の図表に描き（または資料値を直接半対数図表に作図し）、以上の方法で最小自乗直線を当嵌め、その結果を真数に直すことによって、指数曲線の当嵌めを行うことができる。

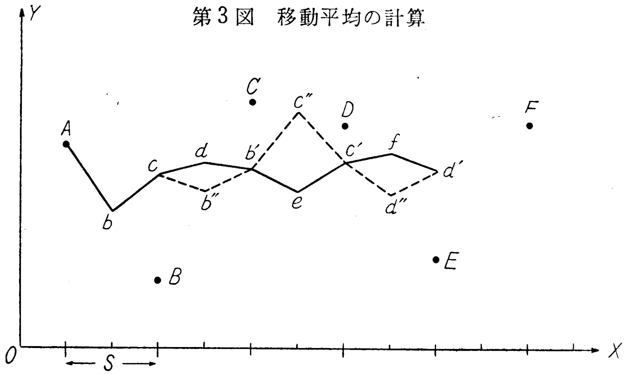
四　移動平均

計算方法　移動平均法は時系列の最初のm項の平均値を得ると、以後次の1項を加えその代り平均を計算した始めの1項を除いて、順次m項の平均値を計算して行く方法であるから、これの図的計算は先に述べた資料値の増減による平均の修正の方法を利用して行うのである。便宜上3項移動平均の場合について説明すると（第3図参照）、まずAから出発して$\frac{s}{2}$づつ右へ進み、bを経てcに達するとcの縦座標はABCの平均値をあらわす。次にDを加えて$ABCD$の平均を求めるには、cからcD上を$\frac{s}{2}$進んでdに行けばよく、そしてそれからAを除いてBCDの平均を得るには、Adを$\frac{s}{2}$右へ延長してb'に進めばよい。またb'から$b'E$上を$\frac{s}{2}$右へ進んだeは$BCDE$の平均値であり、Beを$\frac{s}{2}$右へ延長したc'はCDEの平均値である。以下同様の手続を繰返すことによって、3項移動平均値が順次得られる。

かくて一般にm項移動平均の計算は、まず最初のm項の平均点を求め、それから次の追加資料点へ向って$\frac{s}{2}$だけ進み、次にその点と除外すべき資料点とを結ぶ線分を$\frac{s}{2}$だけ右へ延長して次のm項平均点を求め、順次この過程を繰返して行けばよいのである。

なおこの場合m項移動平均点の右隣りの点は$(m+1)$項移動平均点である。例えば、第3図の$cb'c'$……は3項移動平均値であり、def……は4項移動平均値である。なぜならば、m項平均点から追加資料点へ向って

第3図　移動平均の計算



$\frac{s}{2}$進むことは、$(m+1)$項平均点を得ることになるからである。

検証方法　　移動平均の計算はまた最初のm項の平均値を得ると、まず平均を計算した始めの1項を除き、後に新らしい1項を加えても結果は同じである。この順序による時は、第3図の場合でいうと、まず最初の3項の平均点cと除外する資料点Aとを結ぶ線分を$\frac{s}{2}$だけ右へ延長してb''に行き、次にb''から追加資料点Dへ$\frac{s}{2}$だけ進めばよいのであり、その点はBCDの平均値であるから先に求めたb'と一致する。そこでこの関係を移動平均の図的計算の結果の検証に用いるのである。

なおこの場合はm項移動平均点の左隣りの点は$(m-1)$項移動平均点である。第3図において$b\ b''\ c''$……は2項移動平均値である。それは、m項平均点から右へ、削除資料点と結んで得られる線分を$\frac{s}{2}$延長することは、$(m-1)$項平均点を得ることになるからである。

平均期間が偶数の場合の修正　　平均期間mが偶数の時は、m項移動平均値を更に2項移動平均して移動平均値を資料値と対応させるのであるが（いわゆる centering）、それは図的方法ではm項移動平均点を結ぶ線分の中点の縦座標によって容易に得られる。なぜならば、2項移動平均は隣接2項の平均であり、それは隣接するm項移動平均点を結ぶ線分を$\frac{s}{2}$だけ右へ進めば得られるからである。

計算上の注意　以上の方法で移動平均を計算する場合、始めに系列の途中で数箇所m項平均点を求めておき、逐次計算によって得られた移動平均値を検証するとよい。また12ヵ月移動平均の場合のように平均期間が長い時は、追加、削除の資料点を誤り易いので、平均期間よりも1期多い期間を被う長さの紙を用意し、それをグラフの上側に置いて左端に削除資料点が来、右端に追加資料点があるようにして、移動平均点を求める毎にこの紙を1期づつ右へずらして行くと、点を見誤ることなく容易に計算を行うことができる。

五　季節指数

(一)　12ヵ月移動平均法

計算方法　12ヵ月移動平均法による季節指数は次のようにして求めることができる。まず時系列資料値を対数であらわしそれを算術目盛のグラフに作図する。（この場合資料値を直接半対数図表に描いてもよいが、以下の取扱いの便宜上面倒でも資料値の対数による方がよい。）そして

(1)　前節の方法で12ヵ月移動平均を計算し、更にそれの2ヵ月移動平均を求めて移動平均値を資料値に対応させる。

(2)　資料値から移動平均値を引いた値をグラフの上で読取り、（その符号と共に）別紙に月別に記入する。そして

(3)　グラフの余白の部分を利用して、月別にこの偏差を大きい値から小さい値の順に作図し平均を求める。その場合極端な偏差によって平均値が歪められるのを避けるために、最大と最小の偏差を1個ないしは2個づつ除

いて平均を計算するか、または中位数を用いてもよい。

(4) こうして得られた12個の各月の平均偏差を作図しその平均を求め、次にこの総平均値を各月の平均偏差から引きこの差の合計が0になるように調整すると対数季節指数が得られる。そしてこの季節指数を真数に直し100倍すると真数の季節指数が得られ、それの幾何平均は100になる。

季節調整　時系列資料値から季節変動の影響を除くには、先の計算図表における資料点からその月の対数季節指数を引けばよく、その結果を真数に直すと季節調整値が得られる。

数値計算との比較　以上の図的方法による季節指数の計算は、数値計算による場合は(1)の移動平均と(3)(4)の平均に算術平均を用いるのに対して、この方法は幾何平均を用いる点で異っており、〔注〕そして一般に幾何平均は算術平均よりも値が小さいので、数値計算の場合に比べて季節指数は過大になり、従って季節調整値は過小にあらわされることになる。しかし資料値相互の差が少い程算術平均と幾何平均との差は小さくなり、また(3)の月別平均において異常な値を除いて平均し（ないしは中位数を用い）、更に(4)において各月の平均偏差を総平均で相対化する等のことから、時系列資料値の変動が特に著しくない限り、幾何平均を用いることによる季節指数の相違はあまり大きくないと考えられる。

〔注〕しかしこれは便宜上の事柄であつて、図的方法の場合も算術平均を用いることができ、ただその時は処理が煩雑でありまた計算の誤差が累積し正確性を害するために実際的でないだけである。

(二) 連環比率法

計算方法　連環比率法による季節指数は次のようにして求めることができる。

(1)　時系列資料値を対数であらわしそれを算術目盛の図表に描き、対前月差をグラフの上で求め別紙に月別に記入する。（特に時系列の変動状態を知るための図表を描く必要がない限り、資料値の対数から対前月差を計算した方がよい。）そして

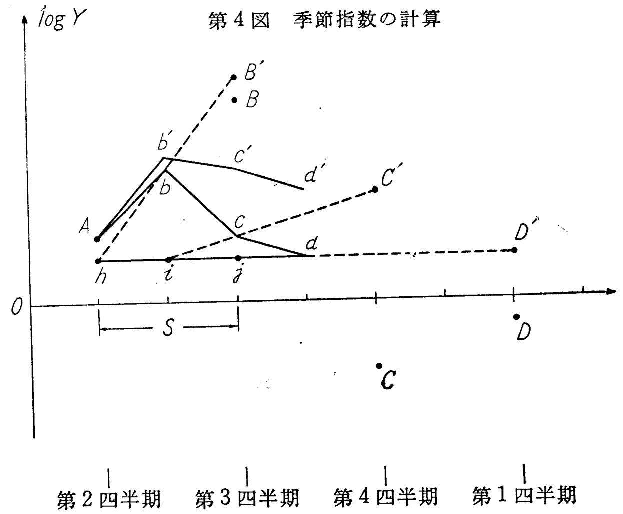
(2)　グラフの余白を利用して、月別に対前月差を大きい値から小さい値の順に作図しその平均を求める。その場合最大値と最小値を除いて平均を計算するか、または中位数を用いてもよい。次に

(3)　2月から始めて3月……12月、1月の順に平均対前月差を作図しその平均を求め、この総平均値が0にならない時はその点を通り横軸に平行線を引く。（これは各月の平均対前月差から総平均値を引くことを意味する。）例えば、第4図は四半期別資料の季節指数の計算過程を示したものであるが、$A\ B\ C\ D$は第2、第3、第4および第1四半期の平均対前月差であり、dはそれの平均である。dは0でないので横軸に平行線hdを引くのである。そして

(4)　(3)の総平均の計算過程において逐次経過した点（第4図の$b\ c\ d$）と今引いた水平線上の$s/2$左隣りの点（第4図の$h\ i\ j$）とを結ぶ線分を右へ$s/2$の1倍、2倍、……11倍だけ延長する。第4図でいえば、線分hbを右へ$s/2$延長してB'を求め、icを$2\left(\frac{s}{2}\right)$延長して$C'$を、また$jd$を$3\left(\frac{s}{2}\right)$延長して$D'$を得るのである。（こうして得られた点は各月の平均対前月差から傾向の影響を除いたものであって、平均対前月差と同じ垂線上にある。そして一番最初の点Aは既に(3)で傾向修正値となっているのでここでは修正しないのである。）

(5)　こうして得られた傾向修正値を平均し、次にこの総平均値を各月の傾向修正値から引きその合計が0にな

第4図　季節指数の計算



るように調整すると対数季節指数が得られる。第4図においてAB'C'D'の平均はd'であり、d'を通る横軸に平行線からAB'C'D'に至る偏差が季節指数である。

証明　以上の図的方法による季節指数の計算は、数値計算の場合は(2)(5)の平均に算術平均を用い、また(3)(4)の傾向の影響の除去に近似式を用いるのに対して、この方法は幾何平均によりまた正確な式を用いる点で異っている。

以上の処理において(1)(2)(5)の意味は明らかであるので、(3)(4)のみを説明すればよい。今資料値の対前月比の月別平均値を $c_1\ c_2 \cdots\cdots c_{12}$ とすると、1月を100とする c_i の連乗（すなわち連鎖指数）が12月を経て1月に来た時

$$100c_2c_3\cdots\cdots c_{12}c_1=100(1+R),\quad R\neq 0 \qquad (1)$$

で100にならないのは、各月の c_i の中に傾向の影響 r が含まれているためである。この r の大きさは(1)式から

$$100(1+R)=100(1+r)^{12} \qquad (2)$$

で求められる。そしてこれを用いて各月の連鎖指数から傾向の影響を除くには、第 $(i+1)$ 月の連鎖指数は $100c_2c_3\cdots\cdots c_{i+1}=$ であり、i カ月分の傾向の影響が累積しているのであるから $(1+r)^i$ で割ればよい。故に

$$\frac{100c_2c_3\cdots\cdots c_{i+1}}{(1+r)^i} \tag{3}$$

さてこれを実際に計算するには、[1)] まず平均的な傾向の影響は(1)および(2)式から

$$\log(1+r)=\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12}\log c_i \tag{4}$$

で求められ、第 $(i+1)$ 月の連鎖指数から傾向の影響を除くには、(3)式から

$$\sum_{i=2}^{i+1}\log c_i-i\log(1+r) \tag{5}$$

を計算しこれに2を加えればよい。そして(5)式はまた

$$i\left(\frac{s}{2}\right)\left\{\frac{\frac{1}{i}\sum_{i=2}^{i+1}\log c_i-\log(1+r)}{\frac{s}{2}}\right\} \tag{6}$$

と書くことができ、従って第 $(i+1)$ 月における傾向の修正は、(i)まず2月からその月までの $\log c_i$ の平均値から $\log(1+r)$ すなわち1月から12月までの $\log c_i$ の平均値を引き、(ii)次にこの差を $s/2$ で割ったものに $i\left(\frac{s}{2}\right)$ を掛ければよいのである。先の図的方法では(i)の処理を(3)で行い(ii)の処理を(4)で行ったのである。[2)]

(1) 数値計算の場合は(2)式から

$$r=(1+R)^{\frac{1}{12}}-1\fallingdotseq\frac{R}{12}$$

また $100\,c_2\cdots\cdots c_{i+1}=100(1+R_{i+1})$ として(3)式から

$$100(1+R_{i+1})(1+r)^{-i}\fallingdotseq100(1+R_{i+1}-ir)$$

とし、これによって傾向の影響の修正を行うのである。

(2) 第4図の例で説明すると、第4四半期 $(i+1=4)$ の場合は(i)の差は jc であり、それを $s/2$ すなわち ij で割ったものは $\angle cij$

である。これに $3\left(\frac{s}{2}\right)$ すなわち $3(\bar{ij})$ を掛けた値は ic の延長と C を通る垂線との交点 C' であり、作図的には ic を $2\left(\frac{s}{2}\right)$ だけ延長すればよいのである。

六　む　す　び

最後に以上の図的計算の際の作図上の注意を若干述べておこう。

(1)　グラフの縦軸の目盛の間隔はできるだけ大きくして資料点が接近しないようにすることが必要である。

(2)　横軸の目盛の間隔はそれを二分割ないしは三分割するのに便利なようにとっておくとよい。

(3)　資料点は折線でつながずに鉛筆で適当な印をつけておき（例えば○で囲む）、また計算過程においても線を引かずに点だけ打ち、必要なものに適当な印をつけて他の点と区別する方が、以後の計算的作図に便利である。

(4)　季節指数の計算の場合のように図表の上で値の差を求める時は、グラフ用紙の端を切取って0を中央にして計算図表と同じ間隔の目盛をつけ、それを適宜当がって偏差を求めると計算が容易に行える。