

動学的レオンティエフ・システムと

フィード・バック効果

岡崎 不二男

一 オープン・システムとクローズド・システム

周知の如く、レオンティエフ・システムが問題とされる場合、人々の関心は、主としてオープン・システムに向けられて来た。レオンティエフ自身も、自著「文献1」の改訂版に於て、その傾向を示している。⁽¹⁾この様に、体系を閉じる事の理由は、繰り返す必要もない程に周知の事乍ら、体系の意味づけに当って陥る、マルサスの解⁽²⁾積からの離脱にあった。

その結果、静学的レオンティエフ・システムは、所与の最終需要に対する、累積的波及効果の積算より成る、均衡産出量決定モデルとして理解されるのが通例となつた。即ち、所与の最終需要ベクトルを Y 、投入係数行列（内生部門）を A 、単位行列を I 、総産出量ベクトルを X とするとき、モデルは次式によつて表わされる。

$$(1) \quad X = (I - A)^{-1} Y$$

ところが(1)の体系に抛る場合、最終需要の実現に伴う波及的派生需要の必要量が積算され、均衡産出量の値を

決定するのであるが、真の意味での波及効果は、この様に一回限りではない。最終需要の中、消費のみをとってみても「消費↓産出量↓所得↓消費↓…」という連鎖的なフィード・バックが考えられる。この問題の解決のため、体系を再び閉じる試みが、エヴァンスの論文〔文献2〕以来若干存在する〔文献3〕し、更に、半封鎖的なシステムの、計算方式については、「柵木——宮沢」算式〔文献4〕が極めて興味深い。

オープン・エンドの体系からの制約は、レオンティエフ・システムの動学化に際して、互に別の問題を換起する。システムの動学化については、既に、レオンティエフ自身も最初から触れていたところであるが〔文献1〕、何分、一つの自足的システムに迄は至っていなかったと思われる。この方面では、レオンティエフにさきがけたフォン・ノイマンの業績〔文献5〕及び、レオンティエフ・システムそのものの動学化を試みた、グッドウィン〔文献6〕、ドーフマン・サムエルソン・ソロー〔文献7〕が注目されなければならない。この内、前二者は、直接的には、一般均衡体系をとりあげたものであるが、後者は、フォン・ノイマン・モデルの基礎に立った上で、現代動学の主要問題の一つである。経済成長理論のためのモデルである。この小論の対称は、成長理論モデルに限定される。

詳細なフォーミュレーションは二節以下に譲って、差当り、問題提示に必要な程度に留めよう。成長理論のための動学モデルの定式化は、例えば次の様に行える。⁽³⁾(1)式の場合と同様、総産出のベクトルを X 、内生部門投入係数行列を A とする。最終需要ベクトルを、資本形成のベクトル S 及び、消費需要ベクトル C とに分ける。この場合、次の様なレオンティエフ・システムが得られる。

$$(2) \quad AX + C + S = X$$

次に、 S のロムポーネント S_{ij} について $S_{ij} = \sum_{j=1}^n S_{ij}$, ($i=1, \dots, n$) と考えることができるから、各内主部門別資本係数を k_{ij} ($i, j=1, \dots, n$) で表わす。定義式は次の様になる。

$$(3) \quad k_{ij} = \dot{S}_{ij} / \dot{X}_j \quad (i, j=1, \dots, n)$$

従って、ベクトル S は、 k_{ij} の n 行 n 列から成る行列を K とすると、次の式で表される。

$$(4) \quad \dot{S} = K \dot{X}$$

(4) を (2) に代入して、

$$(5) \quad X = AX + K \dot{X} + C$$

これを変形すれば、

$$(6) \quad (I - A)X - K \dot{X} = C$$

が得られる。微分方程式系を使うか、定差方程式系を使うかは、便宜上の選択に委ねるとして、微分系で表わすならば、(6) の様な線型連立一階の非同次微分方程式が、オープン・エンドのダイナミック・レオンティエフ・システムである。我々は、非同次項 C の時間形態を所与とした場合、(6) から X の一般解を求めることができる。⁽⁴⁾ ところがこの場合、曩に静学モデルで指摘した問題点は、依然そのまま残されている。即ち、資本係数の導入によつて、我々は、資本形成と、産出量との間の関係を体系の内に、自足的に取り入れることができても、消費 ↓ 産出量 (↓ 所得) ↓ 消費 というフィード・バックは、静学的なオープン・エンド・システムの場合と同様に切断されている。

今、(5) から (6) への変形とは別に、(5) を次の形に変形してみよう。

$$(7) \quad (I-A)X - K\dot{X} = C$$

これは、アグレガティブなケインズ・モデルの「所得—貯蓄—消費」とアナログスである。アグレガティブ・ダイナミック・モデルでは、貯蓄性向を使うことによって、消費—所得の連鎖をつなぎ、加速度係数の導入によって、内生的動学モデルを作った。このことは、レオンティエフ・モデルを、閉じることに外ならない。

今、基本方程式(5)を作った場合の、内生部門 n ヶに、消費(家計)部門を加えよう。このことによって、前掲の各ヴェクトル及び行列の次元は、一次元づつ増加する。この様な拡張を念頭におきつつ、前と同一の記号を用するならば、クローズド・エンド・モデルは、次の様に示される。

$$(8) \quad (I-A)X = K\dot{X}$$

従って、 $|K| \neq 0$ とすれば、

$$(9) \quad \dot{X} = K^{-1}(I-A)X$$

無論この様に、消費を完全に内生化するとは、別の難点即ち、体系のマルサス化と衝突する。然し、巨視動学的視点からすれば、レオンティエフ・システムの動学化に於ては、寧ろ完全な解放体系を棄てて、一種の「半解放体系」とらざるを得ないことを、当面、ドーフマン・サムエルソン・ソローのモデルを手掛りとして、明かにしたい。この場合、体系を完全に閉じてしまわない理由は、マルサス化の難点との調和にある。

提案の一般化は、別の機会に譲り、ドーフマン・サムエルソン・ソロー同様、部門数を単純化して取り扱うであらう。

(1) 「文献1」第2版、六四頁。

(2) 例えば、森島通夫「産業連関論入門」

(3) 動学の定義は、大別して次の三つが考えられる。

(i) J・R・ヒックスの「価値と資本」脚註に於ける定義。

(ii) R・F・ハロッドの「経済動学序説」、J・R・ヒックス「景気循環論」における定義。

(iii) J・A・シムベーターの定義。

シムベーターの、所謂“innovation”をメルクマールとする定義は、少くとも期間分析的な定式化を行う場合には従い得ない。ヒックスの(i)に於ける定義は、形式的には極めて明確であるけれども、比較静学との関係上、不適當と思はれる。従つて、私見では、動学を、不断の与件変動下にある経済の、自己継起的内生理論と見る、(ii)の立場で規定する。然し、この考え方でレオンティエフ・システムの動学化を論ずる場合には、資源利用可能量の外に、投入係数の変化が、同時にとり入れられなければならない。然し、可变的投入係数の処理は、現在のところ総て外生的に扱はれざるを得ない。この意味では、(ii)の規定を、技術変化を外すという点で若干緩めて使用する。

(4) この表現は、古谷弘「動学的投入産出モデルとその均衡的成長」（現代経済学の基本問題、一九五八年所収）に負う。

(5) 古谷、前掲書二二八頁—二二九頁参照。

二 ドーフマン・サムエルソン・ソロー・モデルの問題

先づ、当面の問題にとつて必要な範囲で、ドーフマン・サムエルソン・ソローの動学モデルの⁽⁵⁾要点を掲げよう。体系は、内生部門2ヶと、外生部門2ヶ、即ち資本形成部門と家計需要部門とから成る。今内生部門産出量を X_i 、第 i 部門産出量の内、第 j 部門への投入として使用される量を X_{ij} とする。又、第 j 部門に於ける生産に使用

される資本ストックは、 S_{1j} 及び S_{2j} の二種類からなる。内生部門投入係数は、レオンティエフに従い、

$$(10) \quad a_{ij} = X_{ij}/X_j \quad (i, j=1, 2)$$

である。一方 S_{1j} 、 S_{2j} の使用量は、 j 部門産出量に比例すると仮定して、第 j 部門資本係数は、次の様に規定される。

$$(11) \quad b_{1j} = S_{1j}/X_j, \quad b_{2j} = S_{2j}/X_j \quad (j=1, 2)$$

この場合、第 j 部門生産函数は、次の様に表わされる。

$$(12) \quad X_j = F^j(X_{1j}, X_{2j}, S_{1j}, S_{2j}) = \min \left[\frac{X_{1j}}{a_{1j}}, \frac{X_{2j}}{a_{2j}}, \frac{S_{1j}}{b_{1j}}, \frac{S_{2j}}{b_{2j}} \right] \quad (j=1, 2)$$

このことは、第 j 部門産出量が、第 j 部門資本ストック利用可能量中、小さい方によって決定されることを示す。従って我々は、投入係数及び資本係数を、次の様に表現し直さなければならない。

$$(13) \quad X_{11} \geq a_{11}X_1, \quad X_{21} \geq a_{21}X_1, \quad S_{11} \geq b_{11}X_1, \quad S_{21} \geq b_{21}X_1$$

$$X_{12} \geq a_{12}X_2, \quad X_{22} \geq a_{22}X_2, \quad S_{12} \geq b_{12}X_2, \quad S_{22} \geq b_{22}X_2$$

この様な生産函数を、レオンティエフ・システムにあてはめて定式化すると、フロー生産に関する部分についての式

$$(14) \quad X_1 \geq a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \Delta S_1 + C_1$$

$$X_2 \geq a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \Delta S_2 + C_2$$

$$, \quad (\Delta S_1, \Delta S_2, X_1, X_2 \geq 0)$$

及び、ストックの部分についての式

$$(15) \quad S_1 \geq b_{11}X_1 + b_{12}X_2$$

$$S_2 \geq b_{21}X_1 + b_{22}X_2$$

とからなる。(4)における $4S_1$ 及び $4S_2$ は、各部門の産出量中、資本形成に使用された分である。

ここで、(4)式における、時間的關係を、定差方程式系によって明示すれば、次の様になる。

$$\begin{aligned} X_1(t) &\geq C_1(t+1) + 4S_1(t+1) + a_{11}X_1(t+1) + a_{12}X_2(t+1) \\ X_2(t) &\geq C_2(t+1) + 4S_2(t+1) + a_{21}X_1(t+1) + a_{22}X_2(t+1) \end{aligned}$$

この場合、最初に掲げた生産函数の性質から、(5)式に基づいて、 $4S_i(t) = 4S_{i1}(t) + 4S_{i2}(t)$ ($i=1, 2$) と言う推論を下すことはできない。従って(4)式は、次の様に表わさざるを得ない。

$$\begin{aligned} (16) \quad X_1(t) &\geq C_1(t+1) + S_1(t+1) - S_1(t) + a_{11}X_1(t+1) + a_{12}X_2(t+1) \\ X_2(t) &\geq C_2(t+1) + S_2(t+1) - S_2(t) + a_{21}X_1(t+1) + a_{22}X_2(t+1) \end{aligned}$$

一方、ストックの式(5)については、

$$\begin{aligned} (17) \quad S_1(t) &\geq b_{11}X_1(t) + b_{12}X_2(t) \\ S_2(t) &\geq b_{21}X_1(t) + b_{22}X_2(t) \end{aligned}$$

扱。この体系で、 $4S_1$ 、 $4S_2$ 、及び C_1 、 C_2 は、夫々外生化されているから、我々は、(6)、(7)の制約の下で、 K_1 ($4S_1 + C_1$) + K_2 ($4S_2 + C_2$) を最大化するという、リニア・プログラミング問題を設定することによって、成長理論を処理することができる。(但し目的函数の K は、適当に定められた評価常数)。

手続きの要約を単純化するため、この問題の解の求め方は、暫く無時間的な体系(4)及び(5)を使って進めよう。

(4)を書き直すと、

$$(18) \quad (1 - a_{11})X_1 - a_{12}X_2 \geq AS_1 + C_1 \\ - a_{21}X_1 + (1 - a_{22})X_2 \geq AS_2 + C_2$$

周知の、ホーキンス・サイモン条件〔文献 8〕

$$(19) \quad D = \begin{vmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} \end{vmatrix} > 0$$

を考慮して、クラマー公式によって X_1 及び X_2 を求めると

$$X_1 \geq \frac{1 - a_{22}}{D} (AS_1 + C_1) + \frac{a_{12}}{D} (AS_2 + C_2)$$

$$X_2 \geq \frac{a_{21}}{D} (AS_1 + C_1) + \frac{1 - a_{11}}{D} (AS_2 + C_2)$$

係数を単純化して、

$$X_1 \geq A_{11} (AS_1 + C_1) + A_{12} (AS_2 + C_2)$$

(20)

$$X_2 \geq A_{21} (AS_1 + C_1) + A_{22} (AS_2 + C_2)$$

この値を、ストックの式(9)に代入して整理すると、

$$S_1 \geq (b_{11}A_{11} + b_{12}A_{21}) (AS_1 + C_1) + (b_{11}A_{12} + b_{12}A_{22}) (AS_2 + C_2)$$

$$S_2 \geq (b_{21}A_{11} + b_{22}A_{21}) (AS_1 + C_1) + (b_{21}A_{12} + b_{22}A_{22}) (AS_2 + C_2)$$

もう一度係数を単純化して、

$$S_1 \geq B_{11} (AS_1 + C_1) + B_{12} (AS_2 + C_2)$$

(21)

$$S_2 \geq B_{21} (AS_1 + C_1) + B_{22} (AS_2 + C_2)$$

ここで再び時間を明示すれば、次の式が得られる。

$$(22) \quad B_{11}[S_1(t+1) + C_1(t+1)] + B_{12}[S_2(t+1) + C_2(t+1)] \geq (1 + B_{11})S_1(t) + B_{12}S_2(t)$$

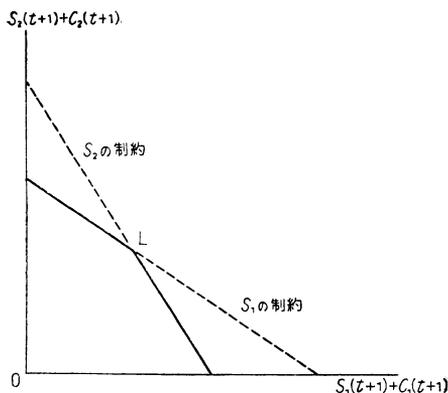
$$B_{21}[S_1(t+1) + C_1(t+1)] + B_{22}[S_2(t+1) + C_2(t+1)] \geq B_{21}S_1(t) + (1 + B_{22})S_2(t)$$

この式に至って、動学的レオンティエフ・システムは、ストックの関係におきかえられた。通常のリニヤール・プログラミング・モデルのグラフ解と全く同様に、左図実線で囲まれた部分が、生産可能点集合を表わす。資本ストックが双方ともに完全利用の状態におかれた場合は、 L 点で現わされ、実線で表わされた凸四角形の、座標軸以外のバウンダリー上（端点 L を除く）に位置した場合は、何れか一方の資源のみが完全利用状態におかれ、

他の資源は、過剰能力を持つこととなって、自由財に転ずる。無論体系が自動的に点 L に位置する保証はない。然し、巨視動学モデルで問題にされる極大成長或いは成長上限⁽²⁾における。体系の位置は、正に点 L によって示されるであろう。

ドーファン・サムエルソン・ソロー・モデルは、この様にして定められた生産フロンティアを規定するシステムを、サブ・モデルとする、有効点軌跡を導出して、成長径路を論ずるのが目的である⁽³⁾。然し第1節に掲げた本稿の問題点は以上に掲げた内容にある。

即ち、上述の様なりニヤール・プログラミング問題は、一定の技術係数の下で規定される体系⁽⁴⁾・⁽⁵⁾において、初期資本ストックの何れか及び



兩産業の産出量に対する初期消費需要量を与えられた場合、残された他の資本ストックを最大化する様な、非負のアクティヴィティー・レベル X_1 、 X_2 を求める事に外ならない。そして、この様なパレート・オブティマムの継起的追跡を重ねることを、動学モデルの目的とする。

今や、既に第1節に掲げた問題点は、この体系について明かである。Cを完全に外生的に解放することは、継起的な分析過程で、「生産↓消費↓生産↓」というフィード・バックを総て除外することとなる。

(1) 「文献7・第一章、第二章」による。二六五頁—三〇九頁。

(2) ハロッドの自然成長率に対応する成長 (R. F. Harrod; "Towards a Dynamic Economics, 1948) J. R. Hicks "A Contribution to the Theory of Trade Cycle, 1950) E. D. Domar の完全利用成長 (E. D. Domar; "Expansion and Employment," American Economic Review, Mar. 1947) 等。

三 半封鎖的動学システム

総括的には第1節で、具体的なモデルについては第2節で、オープン・エンドなダイナミック・システムの問題は明にされた。我々は直ちに、問題の解決を試みよう。ドーフマン・サムエルソン・ソローのモデル同様、内生部門を2ヶとする。便宜上、前節の記号の一部は変えられる。

先ず左表の様な、レオンティエフ・テーブルを考えよう。我々の目的は、消費を完全に内生化して、マルサスの体系とすることを避けつつ、前述のフィード・バックを体系に挿入することである。そのために、今、各産業の産出量に対する消費需要は、家計(上表第0部門)の総産出量に比例するものとする。無論この仮定は、極め

て短期的にしか妥当しないことは周知の事実である。この仮定によって、我々は、家計をも含めて、次の投入係数を規定できる。

$$a_{ij} = x_{ij}/X_j \quad (i=0, 1, 2 \quad j=1, 2) \quad (23)$$

$$a_{i0} = C_i/X_0 \quad (i=1, 2)$$

特殊な消費係数は、⁽¹⁾極めて不安定と考えるのが自然であるから、時間経過とともに、その都度、⁽²⁾外生的なインフレーションによって変更される。

前節(12)と同様の生産函数を念頭において、レオンティエフ・システムに定式化すれば、

$$(24) \quad X_1 \geq a_{11}X_0 + 4S_1 + a_{11}X_1 + a_{12}X_2$$

$$X_2 \geq a_{20}X_0 + 4S_2 + a_{21}X_1 + a_{22}X_2$$

$$X_0 \geq a_{01}X_1 + a_{02}X_2$$

これを變形して、

$$(1 - a_{11})X_1 - a_{12}X_2 - a_{10}X_0 \geq 4S_1$$

$$-a_{21}X_1 + (1 - a_{22})X_2 - a_{20}X_0 \geq 4S_2$$

$$-a_{01}X_1 - a_{02}X_2 + X_0 \geq 0$$

このシステムの係数行列は、ホーキンス・サイモン条件〔文献8〕を満すことは明かであるから、

$$D = \begin{vmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} & -a_{10} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} & -a_{20} \\ -a_{01} & -a_{02} & 1 \end{vmatrix} > 0$$

従ってクラマー公式により、

$$X_1 = \frac{1 - a_{22} - a_{20}}{D} AS_1 + \frac{a_{12} + a_{10}a_{02}}{D} AS_2$$

$$(25) \quad X_2 = \frac{a_{21} + a_{20}a_{01}}{D} AS_1 + \frac{1 - a_{11} - a_{10}a_{01}}{D} AS_2$$

$$X_0 = \frac{a_{11}a_{21} + a_{01}(1 - a_{22})}{D} AS_1 + \frac{a_{01}a_{12} + a_{12}(1 - a_{11})}{D}$$

係数を単純化して、

$$X_1 = A_{11}AS_1 + A_{12}AS_2$$

$$(25) \quad X_2 = A_{21}AS_1 + A_{22}AS_2$$

$$X_0 = A_{01}AS_1 + A_{02}AS_2$$

次に、前節(四)に対応する、ストックの関係を考えよう。ここでも、体系がマルサス化することを避けるため考慮を払って、第0部門ストック、即ち労働を除外しよう。

$$S_1 \setminus S_{11} + S_{12}$$

$$(26) \quad S_2 \setminus S_{21} + S_{22}$$

前節同様 S_{ij} は、第 j 部門における資本ストックとして使用された第 i 部門産出量であり、これは第 j 部門産出量に比例するものとしよう。即ち資本係数が次の様に規定される。

$$k_{11} = S_{11}/X_1, \quad k_{12} = S_{12}/X_2$$

$$(27) \quad k_{21} = S_{21}/X_1, \quad k_{22} = S_{22}/X_2$$

動学的レオンティエフ・システムとフィード・バック効果(岡崎)

(27)を(28)に代入して、

$$\begin{aligned} S_1 &\geq k_{11}X_1 + k_{12}X_2 \\ S_2 &\geq k_{21}X_1 + k_{22}X_2 \end{aligned} \quad (28)$$

(28)の X_1 及び X_2 を(29)に代入すると、

$$\begin{aligned} S_1 &\geq (k_{11}A_{11} + k_{12}A_{21})\Delta S_1 + (k_{11}A_{12} + k_{12}A_{22})\Delta S_2 \\ S_2 &\geq (k_{21}A_{11} + k_{22}A_{21})\Delta S_1 + (k_{21}A_{12} + k_{22}A_{22})\Delta S_2 \end{aligned} \quad (29)$$

再び係数を単純化して、

$$\begin{aligned} S_1 &\geq F_{11}\Delta S_1 + F_{12}\Delta S_2 \\ S_2 &\geq F_{21}\Delta S_1 + F_{22}\Delta S_2 \end{aligned} \quad (29')$$

ここで、時間的關係を導入しよう。一般に、レオンティエフ・システムへの時間の遅れの導入方法には、次の二つが考えられる。

$$\begin{aligned} X(t) &= AX(t+1) + C \\ X(t+1) &= AX(t) + Y \end{aligned}$$

前者は、左から右に、産出と、その中間財需要部門及び最終需要部門への配分に沿った方法であり、後者は、右から左に、前期の中間財及び最終財需要の規模が、今期産出量を決定的という順序に沿った方法である。既に検討した(10)式は、前者の形式である。我々が問題とするフィード・バックは、生産↓所得↓消費の順で進行するものと考えるのが自然であるから、(10)同様、前者に従うこととしよう。そうすると(29)は、

$$(30) \quad \begin{aligned} S_1(t) &\geq F_{11}[S_1(t+1) - S_1(t)] + F_{12}[S_2(t+1) - S_2(t)] \\ S_2(t) &\geq F_{21}[S_1(t+1) - S_1(t)] + F_{22}[S_2(t+1) - S_2(t)] \end{aligned}$$

として表わされる。これは、条件付きで、消費を内生化した点を際き、ドーファン・サムエルソン・ソローの(22)と全くアナログなものである。

(1) ケインズの消費函数に即して定式化するよりも、係数がやや複雑化するところを容認するならば無論可能である。即ち、家計所得は $\sum_{j=1}^n a_{0j} X_j$ である。今、 $a_i = C_i / \sum_{j=1}^n a_{0j} X_j$ を消費係数とすれば、 $C_i = a_i \sum_{j=1}^n a_{0j} X_j$ として表はられる消費のファンクター・バックは、この様に所得を通して考える方が、より具体的である。然し本稿の問題にとっては、この様なリファインメントは、係数の単純化のために避けた。

【参考文献】

- [1] W. Leontief, The Structure of American Economy 1919-1939, 1 st. ed. 19, 2 d. ed., 1951.
- [2] W. D. Evans; "The Effects of Structural Matrix Errors on Interindustry Relations Estimates," *Econometrica*, Vol. XXII, No. 4, Oct. 1954.
- [3] 内田忠夫「投入産出分析による産業活動水準の推定に関する一考察」東大教養学部社会科学紀要、第四輯、一九五五年。
- [4] 宮沢健一「消費変動と産業連関」中山伊知郎教授記念論文集、一九五八年。
- [5] J. von Neumann, "Über ein Ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes", Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, (8): (1935-1936), 1937. Englisch Translation, "A Model of General Economic Equilibrium", Review of Economic Studies, 13 (1), 1945-1946.
- [6] R. M. Goodwin; Static and Dynamic Linear General Equilibrium Models, in the "Input Output Relations" ed.

by the Netherlands Economic Institute, 1953.

[7] R. Dorfman, P. A. Samuelson, and R. M. Solow, Linear Programming and Economic Analysis, 1958, (chap. 11, 12).

[∞] D. Hawkins and H. A. Simon; "Note; Some Conditions of Macroeconomic Stability", *Econometrica*, 17, July-Oct, 1949.