月別傾向線の当嵌め方法

関　弥三郎

一　まえがき

最小自乗法によって月別系列に傾向線を当嵌める場合、項数が多いために計算の労力は非常に大きくなる。そこで普通行われるやり方は、年間の合計をとるかまたは月平均を求めることによって一応月別系列を年別系列に直し、この年別系列に傾向線を当嵌めた後でそれを月別傾向線に変換するのである。(1) しかしこの方法は簡単ではあるが正確なものではなく、直接月別系列に当嵌めた傾向線と大なり小なり相違するのであり、従って両者の差が著しく、または近似値ではなく正確な傾向値が必要な時は、面倒でも直接月別資料値を使って計算しなければならない。

そして一旦月別系列に傾向線を当嵌めると、それ以後の項を追加し、さらに古い項を削除して最近の状勢に適合した傾向線を当嵌めようとする場合、普通用いられる方法では、大部分の項が同じであっても前の傾向線の当嵌め計算の結果は全然役に立たず、あらためて最初から計算を行わなければならない。

ここに提称しようとする方法は、以上二つの難点を緩和ないしは除去して、容易に直接月別系列に傾向線を当嵌めることを可能にするものであって、普通の方法の以上の欠点は、月別系列を一列に並べてそれから直接傾向式の常数の計算に必要な値を算出することによるのに対して、ここで述べる方法は、月別系列を一年毎に分け各年の値から月別傾向線の常数の計算に必要な値を算出するため、計算が容易になりかつ傾向線の改算に当って前の計算の結果を利用し得るのである。以下その方法を説明するのであるが、紙面の都合上最もよく利用される一次—三次の傾向線の場合について述べることにする。

（1） 例えば直線傾向線の場合の、年別傾向式の月別傾向式への変換は次のようにして行われる。（Croxton and Cowden, Applied General Statistics, 2nd ed., 1955. pp. 275—8; F. C. Mills, Statistical Methods, 3rd ed., 1955. pp. 353—4)

年別傾向式の時間の単位	年別系列が年間平均の場合 a	b	年別系列が年間合計の場合 a	b
1年	不変	12で割る	12で割る	144で割る
0.5年	不変	6で割る	12で割る	72で割る

注．これによって得られた月別傾向式は、原点が6月と7月または12月と1月の間にあり、時間の単位は1月である。

例えば、昭和30年—32年における全都市消費者物価指数の年間平均に当嵌めた直線傾向式は

$y_c = 101.31 + 1.754t$ （原点昭和31年，tの単位1年）

である。これを月別傾向式に変換すると、aはそのままでbを12で割ればよいから

$$y_c=101.3+0.15x$$　（原点昭和31年6〜7月，xの単位1月）

となる。この場合原点が6月と7月の間にあり、このままでは傾向値と月別資料値とに半月の差が生ずるので、原点を7月に移すと、$a+\frac{b}{2}=101.37$　であるから

$$y_c=101.4+0.15x$$　（原点昭和31年7月，xの単位1月）

となる。ところが直接月別系列に直線傾向式を当嵌めると

$$y_c=101.31+0.068x$$　（原点昭和31年6〜7月，xの単位0.5月）

原点を7月に移しxの単位を1月にすると、$a+b=101.367$, $2b=0.136$　であるから

$$y_c=101.4+0.14x$$　（原点昭和31年7月，xの単位1月）

となり、年別傾向式から変換した式に比べてaは同じであるがbは 0.01 だけ小さい。

このような変換式と当嵌め式とのbの値の相違は、系列が大きな傾向をもち個々の値の変動が著しく、また期間が長い程より大きくなると考えられる。今の例ではこの差が 0.01（7%）という僅少さであったのは、期間が短い上に傾向も個々の値の変動も小さいからである。

二　月別傾向線の当嵌め方法

n年間従って $m=12n$ 個の月別資料値yに最小自乗法によって傾向線を当嵌める場合、時間xの原点を系列の中央に移すと、直線傾向式　$y_c=a+bx$　の常数a、bの値は

$$a=\frac{\sum y}{m} \qquad (1)$$

$$b=\frac{\sum xy}{\sum x^2} \qquad (2)$$

によって求められる。二次傾向式　$y_c=a+bx+cx^2$　の場合は、bは直線傾向式のbに等しく従って(2)式で求められ、a c の値は

$$c=\frac{m\sum x^2y-\sum y\sum x^2}{m\sum x^4-(\sum x^2)^2} \qquad (3)$$

$$a=\frac{1}{m}\left(\sum y-c\sum x^2\right)=\frac{\sum y\sum x^4-\sum x^2y\sum x^2}{m\sum x^4-(\sum x^2)^2} \qquad (4)$$

によって得られる。また三次傾向式　$y_c=a+bx+cx^2+dx^3$　の時は、a c は二次傾向式と同じであり従って(3)(4)式で求めることができ、b d の値は

$$d=\frac{\sum x^3y\sum x^2-\sum xy\sum x^4}{\sum x^6\sum x^2-(\sum x^4)^2} \qquad (5)$$

$$b=\frac{1}{\sum x^2}\left(\sum xy-d\sum x^4\right)=\frac{\sum xy\sum x^6-\sum x^3y\sum x^4}{\sum x^6\sum x^2-(\sum x^4)^2} \qquad (6)$$

によって得られる。従って一—三次の傾向線を当嵌める場合には　$\sum y$, $\sum xy$, $\sum x^2y$, $\sum x^3y$　および　$\sum x^2$, $\sum x^4$, $\sum x^6$　の値を計算しなければならない。

ところがこれらの値を直接計算すると、項数が多いためにxの絶対値が大きくなるので、その労力は項数が多くなるに従って加速度的に増大する。そこでxの値を減らして計算の労を軽減するために、次のような変数変換を施すことにした。すなわち、年が変る毎に月は1—12月を繰返し経過することから、m項から成る月別系列をn項の年別系列と各年毎の12項から成る月別系列とに分けて考えると、月別系列の時間xは年別系列の時間tと

各年毎の月別系列の時間rとの函数として規定することができる。今の場合月別系列の項数 $m(=12n)$ は偶数であるから、xは $\ldots\ldots, -2.5, -1.5, -0.5, 0.5, 1.5, 2.5, \ldots\ldots$ の値をとる。そしてtは年別系列の項数nが奇数の時は $\ldots\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\ldots$ nが偶数の時は $\ldots\ldots, -2.5, -1.5, -0.5, 0.5, 1.5, 2.5, \ldots\ldots$の値をとり、また$r$は項数が12であるから $-5.5, -4.5, \ldots\ldots, -0.5, 0.5, \ldots\ldots, 4.5, 5.5$ の値をとるものとする。すると

$$x = 12t + r \qquad (7)$$

となる。

そこで(7)式を $\sum xy$, $\sum x^2y$, $\sum x^3y$ に代入して整理すると次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}
\sum xy &= 12\sum_t^n tY_t + \sum_t^n\Big(\sum_r^{12} ry_{tr}\Big) \\
\sum x^2y &= 12^2\sum_t^n t^2Y_t + (2\times12)\sum_t^n t\Big(\sum_r^{12} ry_{tr}\Big) + \sum_t^n\Big(\sum_r^{12} r^2y_{tr}\Big) \\
\sum x^3y &= 12^3\sum_t^n t^3Y_t + (3\times12^2)\sum_t^n t^2\Big(\sum_r^{12} ry_{tr}\Big) + (3\times12)\sum_t^n t\Big(\sum_r^{12} r^2y_{tr}\Big) + \sum_t^n\Big(\sum_r^{12} r^3y_{tr}\Big) \\
&\left(\begin{aligned} t &= \ldots\ldots, -1, 0, 1, \ldots\ldots \text{または}\ldots\ldots, -0.5, 0.5, \ldots\ldots \\ r &= -5.5, \ldots\ldots, -0.5, 0.5, \ldots\ldots, 5.5 \end{aligned}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

[1] [2]

この場合 $Y_t = \sum_r^{12} y_{tr}$ すなわち資料値の年間合計であり、また $\sum_r^{12} ry_{tr}$, $\sum_r^{12} r^2y_{tr}$, $\sum_r^{12} r^3y_{tr}$ はそれぞれ時間rの一乗、二乗、三乗をウェイトとする資料値の年間加重合計である。従って(8)式によると $\sum xy$, $\sum x^2y$, $\sum x^3y$ は年間の単純ないしは加重合計から求めることができ、計算の労力は相手軽減される。これに対応して $\sum y$ も

$$\sum y = \sum_t^n Y_t \tag{9}$$

であるから、年間合計から求めることができる。

なお(8)式による時はrおよび（nが偶数の時は）tの値に端数があり計算がやや煩雑であるので、これを2倍して整数　$r'=-11, -9, \ldots\ldots, -1, 1, \ldots\ldots, 9, 11;\ t'=\ldots\ldots, -3, -1, 1, 3, \ldots\ldots$　にするのが便利であり、しかしその時は(8)式に　$r'=2r$　nが偶数の時はさらに　$t'=2t$　を代入して得られる次の式によらなければならない。

nが奇数の場合

$$\sum xy = \frac{1}{2}\left\{24\sum_t^n tY_t + \sum_t^n\left(\sum_r^{12} r'y_{tr}\right)\right\}$$

$$\sum x^2y = \frac{1}{4}\left\{576\sum_t^n t^2Y_t + 48\sum_t^n t\left(\sum_r^{12} r'y_{tr}\right) + \sum_t^n\left(\sum_r^{12} r'^2y_{tr}\right)\right\}$$

$$\sum x^3y = \frac{1}{8}\left\{13{,}824\sum_t^n t^3Y_t + 1{,}728\sum_t^n t^2\left(\sum_r^{12} r'y_{tr}\right) + 72\sum_t^n t\left(\sum_r^{12} r'^2y_{tr}\right) + \sum_t^n\left(\sum_r^{12} r'^3y_{tr}\right)\right\}$$

$$(t=\ldots\ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots\ldots;\ r'=-11,\ \ldots\ldots -1,\ 1,\ \ldots\ldots,\ 11)$$

nが偶数の場合

$$\sum xy = \frac{1}{2}\left\{12\sum_t^n t'Y_t + \sum_t^n\left(\sum_r^{12} r'y_{tr}\right)\right\}$$

$$\sum x^2y = \frac{1}{4}\left\{144\sum_t^n t'^2Y_t + 24\sum_t^n t'\left(\sum_r^{12} r'y_{tr}\right) + \sum_t^n\left(\sum_r^{12} r'^2y_{tr}\right)\right\}$$

$$\sum x^3y = \frac{1}{8}\left\{1{,}728\sum_t^n t'^3Y_t + 432\sum_t^n t'^2\left(\sum_r^{12} r'y_{tr}\right) + 36\sum_t^n t'\left(\sum_r^{12} r'^2y_{tr}\right) + \sum_t^n\left(\sum_r^{12} r'^3y_{tr}\right)\right\}$$

$$(t'=\ldots\ldots,\ -1,\ 1,\ \ldots\ldots;\ r'=-11,\ \ldots\ldots,\ -1,\ 1,\ \ldots\ldots,\ 11)$$

(10)

第一表　月別傾向線当嵌め計算表

（nが奇数の場合）

r′	年／月	t ……… −2 −1 0 1 2 ………	計
−11	1		
−9	2		
−7	3		
……	……		
7	10		
9	11		
11	12		
(1) Y_t			
(2) tY_t			
(3) t^2Y_t			
(4) t^3Y_t			
(5) $\sum r'y$			
(6) $t(\sum r'y)$			
(7) $t^2(\sum r'y)$			
(8) $\sum r'^2y$			
(9) $t(\sum r'^2y)$			
(10) $\sum r'^3y$			

以上の(8)または(10)式および(9)式の計算に必要な値は、月別系列を縦に書下さないで各年ごとに横に配列した第一表のような計算表から得られる。

次に$\sum x^2$, $\sum x^4$, $\sum x^6$の値は数値表から求めることができるが[3]、数値表に掲載されていないかまたは数値表が利用できない時は、これらに(7)式を代入、整理して得られた次の式によって計算するとよい。

$$\left.\begin{aligned}\sum x^2&=n(144n^2-1)\\ \sum x^4&=n(3{,}110.4n^4-72n^2+0.35)\\ \sum x^6&=\frac{n}{7}(559{,}872n^6-27{,}216n^4+441n^2-1.9375)\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

そしてこれから二次傾向線の当嵌めの際に必要な(3)(4)式の分母は

$$m\sum x^4-\left(\sum x^2\right)^2=n^2(16{,}588.8n^4-567n^2+3.2)\quad(12)$$

また三次傾向線の当嵌めの場合に必要な(5)(6)式の分母は

$$\sum x^6 \sum x^2 - \left(\sum x^4\right)^2 = \frac{n^2}{7}(12{,}899{,}450.88n^8 - 1{,}343{,}692.8n^6 + 39{,}191.04n^4 - 367.2n^2 + 1.08) \qquad (13)$$

によって計算することができる。

以上の(9)—(13)式によって求めた値を(1)—(6)式に代入して算定した月別傾向式は、原点が系列の中央従って年数nが奇数の時は真中の年の6月と7月の間、nが偶数の時は中央の隣接する二つの年の12月と1月の間にあり、xの単位は1月の場合の式である。(4) 従って傾向値を資料値と対応させるために、原点を半月ずらして6月または7月ないしは12月または1月に移す修正が施されなければならない。(5) 例えば、昭和29年1月—32年12月の4カ年間の全都市勤労者世帯消費支出額にこの方法で二次傾向線を当嵌めると第二表のようである。

（1） 若し各年の1月当り平均値$\bar{y}_t$が発表されている時は、Y_tの代りに$\bar{y}_t$によって計算するのが便利である。その場合の式は$Y_t = 12\bar{y}_t$を(8)または(10)式および(9)式に代入すれば得られる。例えば、(10)式の$\sum xy$は次のようになる。

nが奇数の場合……$\sum xy = \frac{1}{2}\{288\sum_t^n t\bar{y}_t + \sum_t^n(\sum_r^{12} r'y_{tr})\}$

nが偶数の場合……$\sum xy = \frac{1}{2}\{144\sum_t^n t'\bar{y}_t + \sum_t^n(\sum_r^{12} r'y_{tr})\}$

（2） なお $\sum_t(\sum_r ry_{tr}) = \sum_r r(\sum_t y_{tr}) = \sum_r rY_r$ であり、また同様にして $\sum_t(\sum_r r^2y_{tr}) = \sum_r r^2Y_r$, $\sum_t(\sum_r r^3y_{tr}) = \sum_r r^3Y_r$ であるから、年間加重合計のn年間の総和は資料値の月別合計Y_rの時間rをウェイトとする加重合計によっても求めることができる。一般に年間加重合計よりも月別合計の加重の方が計算は容易であるので、(8)式の計算において後者によってもよい。その時は第一表の資料値の右側にY_r, rY_r, r^2Y_r, r^3Y_rの欄を設けその合計を求めればよい。

（3） $\sum x^2$, $\sum x^4$, $\sum x^6$の値を数値表から求める時は次の(14)式によるとよい。我々の場合にはxは……, −1.5, −0.5, 0.5, 1.5, ……の値をとるのに対して、数値表は1, 3, 5, ……の値をとる場合の冪和であるから、$x' = 2x$として

第二表　全都市勤労者世帯消費支出額に対する
二次傾向線当嵌め計算表　　（単位円）

	t′	−3	−1	1	3	
r′	年／月	昭和29年	30年	31年	32年	
−11	1月	20,629	20,899	21,951	22,618	
− 9	2	20,026	19,604	20,957	21,403	
− 7	3	22,785	22,981	23,325	25,211	
− 5	4	22,369	22,400	23,236	24,483	
− 3	5	21,970	22,197	22,667	24,516	
− 1	6	22,500	22,297	23,510	25,700	
1	7	23,726	24,117	24,926	27,216	
3	8	22,751	22,544	23,118	25,134	
5	9	21,446	22,006	22,042	24,230	
7	10	22,937	23,360	23,500	25,509	
9	11	21,696	23,167	23,234	24,691	
11	12	33,968	36,586	38,302	42,385	計
Y_t		276,803	282,158	290,768	313,096	1,162,825
$t'Y_t$		−830,409	−282,158	290,768	939,288	117,489
t'^2Y_t		2,491,227	282,158	290,768	2,817,864	5,882,017
$\sum r'y$		161,777	208,168	198,378	251,220	819,543
$t\sum r'y$		−485,331	−208,168	198,378	753,660	258,539
$\sum r'^2y$		13,770,187	14,250,078	14,756,960	15,801,848	58,579,073

$m=48,\ n=4$

$\sum y=1{,}162{,}825$

$\sum xy=\frac{1}{2}(12\times 117{,}489+819{,}543)=1{,}114{,}705{,}5$

$\sum x^2y=\frac{1}{4}(144\times 5{,}882{,}017+24\times 258{,}539+58{,}579{,}073)=227{,}948{,}614.25$

$\sum x^2=4(144\times 4^2-1)=9{,}212$

$m\sum x^2y-\sum y\sum x^2=48\times 227{,}948{,}614.25-1{,}162{,}825\times 9{,}212=229{,}589{,}584$

$m\sum x^4-(\sum x^2)^2=4^2(16{,}588.8\times 4^4-576\times 4^2+3.2)=67{,}800{,}320$

$b=\frac{1{,}114{,}705.5}{9{,}212}=121.005$　　　$c=\frac{229{,}589{,}584}{67{,}800{,}320}=3.38626$

$a=\frac{1}{48}(1{,}162{,}825-3.38626\times 9{,}212)=23{,}575.64$

$\therefore\ y_c=23{,}575.6+121.01x+3.386x^2$（原点30年12月～31年1月，xの単位1月）

原点を31年1月に移すと　$a+\frac{b}{2}+\frac{c}{4}=23{,}636.9,\ b+c=124.40$　であるから

$y_c=23{,}636.9+124.40x+3.386x^2$　（原点31年1月，xの単位1月）

$$\left.\begin{aligned}\sum x^2 &= \frac{1}{4}(2\sum x'^2)\\ \sum x^4 &= \frac{1}{16}(2\sum x'^4)\\ \sum x^6 &= \frac{1}{64}(2\sum x'^6) \qquad (x'=1,\ 3,\ 5,\ \cdots\cdots,\ m-1)\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

⒁式の右辺の $\sum x'^2$, $\sum x'^4$, $\sum x'^6$ の値は奇数の冪和の表から得られる。

（４） 念のために注意しておくと、⑽—⒁式は時間 x が ……, −1.5, −0.5, 0.5, 1.5, …… の値をとる場合の式である。もしこれを普通行われるように x が ……, −3, −1, 1, 3, …… の値をとるものとすると、その時の $\sum xy$, …… および $\sum x^2$, …… の値は⑽および⒁式の右辺の中括弧および小括弧内の式で求められる。（しかしそれによって当嵌められた傾向式においては x の単位は½月である。）

（５） 傾向式の原点の修正は次のようにして行う。すなわち、元の傾向式の常数を a b c d、原点修正後の傾向式の常数を a′ b′ c′ d′ であらわすと

7月ないしは１月に移す場合

一次式……$a'=a+\frac{b}{2}$,　$b'=b$

二次式……$a'=a+\frac{b}{2}+\frac{c}{4}$,　$b'=b+c$,　$c'=c$

三次式……$a'=a+\frac{b}{2}+\frac{c}{4}+\frac{d}{8}$,　$b'=b+c+\frac{3d}{4}$,　$c'=c+\frac{3d}{2}$,　$d'=d$

6月ないしは12月に移す場合

一次式……$a'=a-\frac{b}{2}$,　$b'=b$

二次式……$a'=a-\frac{b}{2}+\frac{c}{4}$,　$b'=b-c$,　$c'=c$

三次式……$a'=a-\frac{b}{2}+\frac{c}{4}-\frac{d}{8}$,　$b'=b-c+\frac{3d}{4}$,　$c'=c-\frac{3d}{2}$,　$d'=d$

三　l期別傾向線の当嵌め方法

次に以上の月別傾向線の当嵌め方法の基礎である(8)および(11)式を証明しよう。その場合、この方法は一般的に一年間をl期に分け、n年間すなわちln個の資料値の系列に傾向線を当嵌める場合の一例と考えられるので、ここでは一応n年間のl期別系列に傾向線を当嵌める場合の $\sum xy$, $\sum x^2y$, $\sum x^3y$ および $\sum x^2$, $\sum x^4$, $\sum x^6$ の式を求め、それから(8)(11)式を証明することにする。

l期別資料の場合

さてn年間従って $m=ln$ 項から成るl期別系列の時間をxであらわし、それをn項の年別系列と各年毎のl項から成るl期別系列とに分けた場合の年別系列の時間をt、l期別系列の時間をrであらわす。そしてxtrはmn$l$が奇数の時はそれぞれ ……, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, …… の値をとり、mn$l$が偶数の時は …… −2.5, −1.5, −0.5, 0.5, 1.5, 2.5, …… の値をとるものとすると、xとtrとの間には次の関係が成立する。

$$x=lt+r \tag{15}$$

これを $\sum xy$ に代入すると

$$\sum xy=\sum_t^n\sum_r^l(lt+r)y_{tr}=l\sum_t^n t\sum_r^l y_{tr}+\sum_t^n\sum_r^l ry_{tr}$$

ところが $\sum_r^l y_{tr}$ は資料値の年間合計であるからY_tであらわすと

$$=l\sum_t^n tY_t+\sum_t^n\left(\sum_r^l ry_{tr}\right) \qquad (16)$$

次に⒂式を $\sum x^2y$ および $\sum x^3y$ に代入すると

$$\sum x^2y=\sum_t^n\sum_r^l(lt+r)^2y_{tr}$$

$$=\sum_t^n\sum_r^l(l^2t^2+2ltr+r^2)y_{tr}$$

$$=l^2\sum_t^n t^2Y_t+2l\sum_t^n t\left(\sum_r^l ry_{tr}\right)+\sum_t^n\left(\sum_r^l r^2y_{tr}\right) \qquad (17)$$

$$\sum x^3y=\sum_t^n\sum_r^l(lt+y)^3y_{tr}$$

$$=\sum_t^n\sum_r^l(l^3t^3+3l^2t^2r+3ltr^2+r^3)y_{tr}$$

$$=l^3\sum_t^n t^3Y_t+3l^2\sum_t^n t^2\left(\sum_r^l ry_{tr}\right)+3l\sum_t^n t\left(\sum_r^l r^2y_{tr}\right)+\sum_t^n\left(\sum_r^l r^3y_{tr}\right) \qquad (18)$$

今度は⒂式を $\sum x^2$ に代入すると

$$\sum x^2=\sum_t^n\sum_r^l(lt+r)^2$$

$$=\sum_t^n\sum_r^l(l^2t^2+2ltr+r^2)$$

$$=l^2\sum_t^n t^2\sum_r^l 1+2l\sum_t^n t\sum_r^l r+\sum_r^l r^2\sum_t^n 1$$

$$=l^3\sum_t^n t^2+n\sum_r^l r^2 \qquad \left(\because\ \sum_r^l 1=l,\ \sum_r^l r=0,\ \sum_t^n 1=n\right)$$

ところで $\sum t^2$ はnの奇数、偶数のいかんにかかわらず

$$\sum_{t}^{n} t^2 = \frac{n(n^2-1)}{12} \tag{i}$$ [1]

であり、これからnの代りにlと置くことによって

$$\sum_{r}^{l} r^2 = \frac{l(l^2-1)}{12} \tag{ii}$$

である。故に

$$\sum x^2 = l^3 \frac{n(n^2-1)}{12} + n\frac{l(l^2-1)}{12}$$

$$= \frac{ln}{12}(l^2n^2-1) \tag{19}$$

次に⒂式を $\sum x^4$ に代入すると

$$\sum x^4 = \sum_{t}^{n}\sum_{r}^{l}(lt+r)^4$$

$$= \sum_{t}^{n}\sum_{r}^{l}(l^4t^4+4l^3t^3r+6l^2t^2r^2+4ltr^3+r^4)$$

$$= l^5\sum_{t}^{n}t^4+6l^2\sum_{t}^{n}t^2\sum_{r}^{l}r^2+n\sum_{r}^{l}r^4 \qquad \left(\because \sum_{r}^{l}r=0,\ \sum_{r}^{l}r^3=0\right)$$

これに(i)(ii)式および $\sum t^4 = \frac{n(3n^4-10n^2+7)}{240}$ (iii), $\sum r^4 = \frac{l(3l^4-10l^2+7)}{240}$ (iv) を代入して整理すると

$$\sum x^4 = \frac{ln}{240}(3l^4n^4-10l^2n^2+7) \tag{20}$$

また⒂式を $\sum x^6$ に代入すると $\sum r=0$, $\sum r^3=0$, $\sum r^5=0$ であるから

$$\sum x^6 = \sum_{t}^{n}\sum_{r}^{l}(lt+r)^6$$

$$=l^7\sum_t^n t^6+15l^4\sum_t^n t^4\sum_r^l r^2+15l^2\sum_t^n t^2\sum_r^l r^4+n\sum_r^l r^6$$

これに(i)—(iv)および $\sum t^6=\dfrac{n(3n^6-21n^4+49n^2-31)}{1,344}$ (v), $\sum r^6=\dfrac{l(3l^6-21l^4+49l^2-31)}{1,344}$ (vi) を代入して整理すると

$$\sum x^6=\frac{ln}{1,344}(3l^6n^6-21l^4n^4+49l^2n^2-31) \qquad (21)$$

なお⒆—㉑式から、二次および三次の傾向線の当嵌めの際に必要な⑶—⑹式の分母は次のようになる。

$$m\sum x^4-(\sum x^2)^2=\frac{l^2n^2}{180}(l^4n^4-5l^2n^2+4) \qquad (22)$$

$$\sum x^6\sum x^2-(\sum x^4)^2=\frac{l^2n^2}{33,600}(l^8n^8-15l^6n^6+63l^4n^4-85l^2n^2+36) \qquad (23)$$

そして⒃—㉓式によって求めた値を⑴—⑹式に代入して算定した傾向式は、原点が系列の中央にあり、xの単位はl期の場合の式である。

以上は一般的なl期別資料の場合であるが、これから月別資料の場合の式を得ようとすれば、⒂—㉓式において$l=12$と置けばよい。すると⒂式から⑺式が、⒃—⒅式から⑻式が得られ、また⒆—㉑式から⑾式が、㉒㉓式から⑿⒀式が導かれる。

四半期別資料の場合

そしてまた$l=4$と置くと四半期別資料の場合の式が得られ、その結果は次のようである。

nが奇数の場合

$$\sum xy=\frac{1}{2}\{8\sum_t^n tY_t+\sum_t^n(\sum_r^4 r'y_{tr})\}$$

$$\sum x^2y=\frac{1}{4}\{64\sum_t^n t^2Y_t+16\sum_t^n t(\sum_r^4 r'y_{tr})+\sum_t^n(\sum_r^4 r'^2y_{tr})\}$$

$$\sum x^3y=\frac{1}{8}\{512\sum_t^n t^3Y_t+192\sum_t^n t^2(\sum_r^4 r'y_{tr})+24\sum_t^n t(\sum_r^4 r'^2y_{tr})+\sum_t^n(\sum_r^4 r'^3y_{tr})\}$$

$$(t=\cdots\cdots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \cdots\cdots;\ r'=-3,\ -1,\ 1,\ 3)$$

nが偶数の場合

$$\sum xy=\frac{1}{2}\{4\sum_t^n t'Y_t+\sum_t^n(\sum_r^4 r'y_{tr})\}$$

$$\sum x^2y=\frac{1}{4}\{16\sum_t^n t'^2Y_t+8\sum_t^n t'(\sum_r^4 r'y_{tr})+\sum_t^n(\sum_r^4 r'^2y_{tr})\}$$

$$\sum x^3y=\frac{1}{8}\{64\sum_t^n t'^3Y_t+48\sum_t^n t'^2(\sum_r^4 r'y_{tr})+12\sum_t^n t'(\sum_r^4 r'^2y_{tr})+\sum_t^n(\sum_r^4 r'^3y_{tr})\}$$

$$(t'=\cdots\cdots,\ -1,\ 1,\ \cdots\cdots;\ r'=-3,\ -1,1,\ 3) \tag{24}$$

$$\sum x^2=\frac{n}{3}(16n^2-1)$$

$$\sum x^4=\frac{n}{60}(768n^4-160n^2+7)$$

$$\sum x^6=\frac{n}{336}(12{,}288n^6-5{,}376n^4+784n^2-31) \tag{25}$$

$$m\sum x^4-(\sum x^2)^2=\frac{16n^2}{45}(64n^4-20n^2+1)$$

$$\sum x^6\sum x^2-(\sum x^4)^2=\frac{n^2}{525}(16{,}384n^8-15{,}360n^6+4{,}032n^4-340n^2+9) \tag{26}$$

以上の式によって得られた値を(1)—(6)式に代入して算定した傾向式は、原点が系列の中央にありxの単位は1四半期の場合の式である。

今迄は一年をl期に分け、n年間におけるln個の資料値に傾向線を当嵌める場合について考えてきたが、この方法は一年に限らず一定期間（例えば、一週間、四週間等）をl期に分け、n期間におけるln個の資料値に傾向線を当嵌める場合——形式的に言えば、資料値を矩形に配列し得る場合——に適用することができ、日別系列、週別系列更には長期間の年別系列の場合にも利用し得る。例えば、先の(24)—(26)式はまた週別系列を4週間毎に区切った場合の傾向線の当嵌め式でもある。

そして資料値が矩形に配列し得ない時は、余った項数が偶数であり左端の欄の項数と右端の欄の項数とが相等しい（すなわちxとrの絶対値が相等しい）限り、$\sum xy$, $\sum x^2y$, $\sum x^3y$ の式はそのまま利用することができる。しかし $\sum x^2$, $\sum x^4$, $\sum x^6$ の式は矩形配置した部分の値を与えるために、余った項に対応するxの2乗、4乗、6乗を直接計算してそれに加える（ないしは引く）ことが必要である。

（1） これは次のようにして証明される。すなわち、$\sum_{-}^{+} t^2 = 2\sum^{+} t^2$ と書くことができ、右辺はnが奇数の時は $t=1, 2, \ldots\ldots, \frac{n-1}{2}$ の自乗和であるから、自然数の自乗和の公式から

$$\sum t^2 = 2\left\{\frac{1}{6}\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}+1\right)\left(2\frac{n-1}{2}+1\right)\right\} = \frac{n(n^2-1)}{12}$$

またnが偶数の時は右辺は $t=0.5, 1.5, \ldots\ldots, \frac{n-1}{2}$ すなわち $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots\ldots, \frac{n-1}{2}$ の自乗和であるから、奇数の自乗和の公式を利用して

$$\sum t^2 = 2\frac{1}{4}\frac{1}{3}\left(\frac{n}{2}\right)\left\{4\left(\frac{n}{2}\right)^2-1\right\}=\frac{n(n^2-1)}{12}$$

従って一般に　$\sum t^2=\frac{n(n^2-1)}{12}$　である。〔証明終り〕

なお(iii)(v)式もこれと同様にして自然数および奇数の4乗和、6乗和の公式を用いて証明することができるが、煩雑であるのでここでは省略することにする。

四　むすび――この方法の長所

以上の傾向線の当嵌め方法は次の長所をもっている。

(1)　まず第一に、計算の労を相当軽減することができる。すなわち、普通の方法による時はm個の項の各〻について xY, x^2Y, x^3Y の計算を行うのに対して、この方法ではm個の項の各〻について rY, r^2Y, r^3Y の計算を行い、更にn個の各年の値について tY, t^2Y, t^3Y および $t\sum rY$, $t^2\sum rY$, $t\sum r^2Y$ を計算しなければならないために、一見計算の労が多くなるようであるが、前者の場合はxの絶対値が相当大きくなるのに対して、後者においてはr tの絶対値はずっと小さいために、系列が長い程全体としては計算が相当に簡便化される。

(2)　次に、新らしい項の追加および古い項の削除による傾向線の改算を容易ならしめる。すなわち、月別系列に新らしい項を追加する時は、その追加された部分のみについて $\sum rY$, $\sum r^2Y$, $\sum r^3Y$ を計算すればよく、他の年のこれらの値は前の計算表から直ちに得られる。そして更に古い項を除く時はその年のこれらの値を捨て、この新らしい系列の年数n′に応じて決るtの値によって、n′個の各年の値について tY, t^2Y, t^3Y および $t\sum rY$,

$t^2\sum ry$, $t\sum r^2y$ を計算すればよいのであり、従って計算の労は著しく縮減される。この(2)の利点はこの方法の最大の長所である。

(3) なお同時に年別傾向線の当嵌めに必要な資料が得られる。すなわち、第一表の(1)—(4)行は年別資料値が年間合計の場合の年別傾向線当嵌めの計算表にほかならないので、これから年別傾向線を計算することができる。若し年別資料値が年間の月平均である時は、$Y_t = 12\bar{y}_t$ であるから(1)—(4)行の合計を12で割ればよい。

また各年毎の傾向線の当嵌めに必要な資料が得られる(第一表(1)(5)(8)(10)行)こともこの方法の長所に数えることができるであろう。