直交多項式による傾向線の当嵌め

関　弥　三　郎

一、直交多項式の長所

R. A. Fisher 博士によって回帰曲線の当嵌めに用いられた直交多項式(orthogonal polynomials)は、又時系列の傾向線の当嵌めにも有用な方法である。直交多項式の長所は次の二つの点である。

(一) 時系列の傾向を多項式によって記述する場合、普通の多項式

$$Y = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots\cdots$$

による時は、方程式の次数が異ると、係数 a_i ($i=0,1,2,\cdots\cdots$) の或るものは値が変る。[1] 従って、資料系列に種種の次数の多項式を当嵌め、それぞれの有用さを吟味して適当なものを選択しようとすれば、[2] 次数が異る毎にその係数の値を計算し直さなければならない。しかし、直交多項式による時は、このような係数の値の再計算を必要とせずに、次数の異る傾向式を順次得ることができる。

(三) 普通の多項式を資料系列に当嵌める場合、二次以上の多項式の時は、正規方程式の連立解による係数の値の計算は相当面倒である。しかし、直交多項式による時は、次数のいかんにかかわらず、係数の値の計算はきわめて簡単である。

そこで、三次又はそれ以上の多項式を当嵌める時は、直交多項式によるのが便利であるとされている。しかし、二次式、一次式の場合でも、直交多項式によるのと普通の多項式によるのと、計算の労は同じであるか又は前者の方が多少軽減されるので、一般に、多項式による時系列の傾向の記述は直交多項式による方がよいと考えられる。

本稿の目的は、直交多項式による傾向線の当嵌めの方法を簡単に解説し、その際有用な数値表を掲載して利用に供することにある。従って、その場合用いられる数学式の証明は、直交多項式の性質の理解に必要な限度に止め、他は省略することにする。[3]

① 例えば、二次式と一次式は、a_1 の値は同じであるが a_0 の値を異にし、三次式と二次式は、a_0 及び a_2 の値は同じであるが a_1 の値を異にする。又四次式と三次式は、a_1 a_3 の値は同じであるが a_0 a_2 の値を異にする。これらのことは、各次数の式を当嵌める場合の正規方程式を a_i ($i=0,1,2,\cdots\cdots$) について解くことによって証明される。

② 当嵌められた多項式の選択に、確率論的な有意性検定の方法を用いることができる。しかし、時系列の場合はそれによる

ことはできないのであって、現象の性質に基く考慮から傾向式の選択がなされねばならない。その例は、Smith, J. G. and Duncan, A. J.: Elementary Statistics and Applications, 1944, pp. 639-642 にみられる。

③ 数学式の証明は次の諸書に詳述されている。
Smith and Duncan: ibid., pp. 600-607.
Kendall, M. G.: The Advanced Theory of Statistics, vol. II., 1951, pp. 146-149, 159-161.
森田優三、経済変動の統計分析法、一九五五、三六—三九頁。
中川友長、統計学、一九五四、一三五—一三八頁。

二、直交多項式による当嵌め

N個の値 y_i $(i=1,2,\ldots,N)$ より成る時系列の傾向がk次の多項式で記述し得ると考えられ、そこでこれにk次の直交多項式

$$Y=A_0\phi_0(t)+A_1\phi_1(t)+A_2\phi_2(t)+\cdots\cdots+A_k\phi_k(t) \qquad (1)$$

但し、$\phi_i(t)$ $(i=0,1,2,\ldots,k)$ は t に関する i 次の直交多項式であり

$$\sum_t\phi_i(t)\phi_j(t)=0 \qquad (i\neq j)$$①

を最小自乗法で当嵌めるものとする。すると

$$\frac{\partial}{\partial A_i}\sum_t(y-Y)^2=\frac{\partial}{\partial A_i}\sum_t(y-A_0\phi_0(t)-A_1\phi_1(t)-\cdots\cdots-A_k\phi_k(t))^2=0 \qquad (i=0,1,2,\cdots,k)$$

より、正規方程式

$$\sum\phi_0(t)y=A_0\sum\phi_0(t)^2+A_1\sum\phi_0(t)\phi_1(t)+\cdots\cdots+A_k\sum\phi_0(t)\phi_k(t)$$

$$\sum\phi_1(t)y=A_0\sum\phi_0(t)\phi_1(t)+A_1\sum\phi_1(t)^2+\cdots\cdots+A_k\sum\phi_1(t)\phi_k(t)$$

$$\vdots$$

$$\sum\phi_{k}(t)y=A_0\sum\phi_0(t)\phi_k(t)+A_1\sum\phi_1(t)\phi_k(t)+\cdots\cdots+A_k\sum\phi_k(t)^2$$

が得られる。しかし $\sum_t\phi_i(t)\phi_j(t)=0\ (i\neq j)$ であるから、この正規方程式は

$$\sum\phi_0(t)y=A_0\sum\phi_0(t)^2$$

$$\sum\phi_1(t)y=A_1\sum\phi_1(t)^2$$

$$\vdots$$

$$\sum\phi_k(t)y=A_k\sum\phi_k(t)^2$$

となり、かくて直交多項式の係数は

$$\left.\begin{aligned}
A_0&=\frac{\sum\phi_0(t)y}{\sum\phi_0(t)^2}=\frac{\sum y}{N}\qquad(\because\ \phi_0(t)=1)\\
A_1&=\frac{\sum\phi_1(t)y}{\sum\phi_1(t)^2}\\
&\ \ \vdots\\
A_k&=\frac{\sum\phi_k(t)y}{\sum\phi_k(t)^2}
\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

で求められる。

これより明らかなように、直交多項式の係数の計算は簡単である上に、零次の係数A_0は零次の直交多項式$\phi_0(t)$のみで決り、一次の係数A_1は一次の直交多項式$\phi_1(t)$のみで、又二次の係数A_2は二次の直交多項式$\phi_2(t)$のみで決り、他の

次数の直交多項式とは無関係である。従って、当嵌められた直交多項式の次数に関係なく係数A_iの値は同一であり、このため、例えば、二次式を当嵌め更に三次式が必要な時は、ただA_3を求めればよく、又一次式をも得んとすればA_2以下の項を捨てればよい。最初に述べた直交多項式の長所は、この正規方程式の解の独立性と単純さとによるのである。

(2)式によってA_i $(i=1,2,\cdots,k)$の値を求めるには、各tの値に対する直交多項式$\phi_{i(t)}$の値を知らなければならない。今tの原点を系列の中央に移すと、項数Nが奇数の時は、tは……$-2, -1, 0, 1, 2$……の値をとり、Nが偶数の時は、tは……$-1.5, -0.5, 0.5, 1.5$,……の値をとる。この場合、Nが或る値の時に、tの各値に対する$\phi_{i(t)}$の値は計算されて統計数値表に掲載されており、[2]又$\sum_t \phi_{i(t)}^2$の値も併記されている。しかし$\phi_{i(t)}$の値は必ずしも整数にならないので、表記の便宜上、適当に選んだλ_iを乗じて得られた整数

$$\phi_i'(t) = \lambda_i \phi_{i(t)} \qquad (i=1,2,\cdots\cdots) \qquad (3)$$

がλ_iと共に数値表に記載されている。従って$\sum_t \phi_{i(t)}^2$の値も

$$\sum_t \phi_i'(t)^2 = \lambda_i^2 \sum_t \phi_{i(t)}^2 \qquad (i=1,2,\cdots\cdots) \qquad (4)$$

として記されている。故に、これによってA_iの値を計算すると

$$A_i' = \frac{\sum \phi_i'(t) y}{\sum \phi_i'(t)^2} = \frac{1}{\lambda_i}\frac{\sum \phi_{i(t)} y}{\sum \phi_{i(t)}^2} = \frac{A_i}{\lambda_i} \qquad (i=1,2,\cdots\cdots) \qquad (5)$$

が得られる。しかし(1)式は

$$Y = A_0 + \frac{A_1}{\lambda_1}\lambda_1\phi_{1(t)} + \frac{A_2}{\lambda_2}\lambda_2\phi_{2(t)} + \cdots\cdots + \frac{A_k}{\lambda_k}\lambda_k\phi_{k(t)}, \qquad \phi_{0(t)} = 1$$

$$= A_0 + A_1'\phi_1'(t) + A_2'\phi_2'(t) + \cdots\cdots + A_k'\phi_k'(t) \qquad (6)$$

と書替えられ、傾向値を求める場合 $\phi_i'(t)$ の値を傾向式に代入しなければならないから、直交多項式の係数は A'_i であらわすのが便利である。

(5)式の分子 $\sum_t \phi_i'(t)y$ の計算は第一表のようにして行う。直交多項式 $\phi_i(t)$ は、i が偶数の時は偶函数即ち $\phi_i(t) = \phi_i(-t)$、i が奇数の時は奇函数即ち $\phi_i(t) = -\phi_i(-t)$ である。そこで、先ず y の系列を折半して、前半を上から下へ、後半を下から上へ記し、t の絶対値を同じくする y を同じ行に並べ、その和 $y^{(+)}$ 及び差 $y^{(-)}$ を計算する。次に $y^{(+)}$ には i が偶数の $\phi_i'(t)$ を乗じ、$y^{(-)}$ には i が奇数の $\phi'_i(t)$ を乗ずる。但し、$\phi_i'(t)$ の値は $t \geqq 0$ に対する値をとる。③ そしてこの積の和を計算すると $\sum_t \phi_i'(t)y$ が得られる。

第一表は、昭和10―27年の我が国における写真機生産量の資料に、この方法で三次傾向線を当嵌めた場合の計算表である。我が国の写真機生産量は、昭和15年までは年々増加してきたが以後激減し、昭和20年を最低点として上昇に転じ、昭和26年以降急激に増加している。そこで、この戦争の影響による生産量の変動を記述するために、三次曲線を当嵌めたのである。

① 二個の t の函数 $\phi_1(t)$ と $\phi_2(t)$ とが、t のすべての値に対するそれらの積の合計が0になるという条件を満たす時、$\phi_1(t)$ と $\phi_2(t)$ とは互に直交するという。一般に、k 個の t の函数 $\phi_1(t), \phi_2(t), \cdots\cdots, \phi_k(t)$ が $\sum_t \phi_i(t)\phi_j(t) = 0 \quad (i \neq j)$ の条件を満足する時、これら k 個の函数は直交系を作るといい、それらを直交函数という。

② それは後に述べる(7)式に t の値を代入して計算された。

③ 第一表において、$y^{(-)}$ を (1)―(2) で求めた時は、$\phi_i'(t)$ は $t \leqq 0$ に対する値をとる。

第 一 表　昭和10〜27年の我が国における写真機（手提カメラのみ）生産量に対する三次曲線当嵌め計算表

昭和	写真機生産量 y（千個） (1)	(2)	昭和	t	$y^{(+)}$ (1)+(2)	$\phi_2'(t)$	$\phi_2'(t)y^{(+)}$	$y^{(-)}$ (2)−(1)	$\phi_1'(t)$	$\phi_1'(t)y^{(-)}$	$\phi_3'(t)$	$\phi_3'(t)y^{(-)}$
10年	95	358	27年	8.5	453	68	30,804	263	17	4,471	68	17,884
11	155	214	26	7.5	369	44	16,236	59	15	885	20	1,180
12	178	117	25	6.5	295	23	6,785	− 61	13	− 793	− 13	793
13	188	83	24	5.5	271	5	1,355	− 105	11	− 1,155	− 33	3,465
14	206	53	23	4.5	259	− 10	− 2,590	− 153	9	− 1,377	− 42	6,426
15	219	52	22	3.5	271	− 22	− 5,962	− 167	7	− 1,169	− 42	7,014
16	203	24	21	2.5	227	− 31	− 7,037	− 179	5	− 895	− 35	6,265
17	134	13	20	1.5	147	− 37	− 5,439	− 121	3	− 363	− 23	2,783
18	58	30	19	0.5	88	− 40	− 3,520	− 28	1	− 28	− 8	224
計	1,436	944			2,380		30,632	− 492		− 424		46,034

通産省「機械統計年報」

$N=18$

$$A_0=\frac{2,380}{18}=132.222$$

$$A_1'=-\frac{424}{1,938}=-0.218\ 782 \qquad A_1=-0.218\ 782\times 2=-0.437\ 564$$

$$A_2'=\frac{30,632}{23,256}=1.317\ 165 \qquad A_2=1.317\ 165\times\frac{3}{2}=1.975\ 748$$

$$A_3'=\frac{46,034}{23,256}=1.979\ 446\ 1 \qquad A_3=1.979\ 446\ 1\times\frac{1}{3}=0.659\ 815\ 3$$

故に

$$Y=132.222-0.218\ 8\phi_1'(t)+1.317\ 17\phi_2'(t)+1.979\ 446\phi_3'(t)$$

三、tによる当嵌め

(2)式により直交多項式の当嵌めを行うには、直交多項式$\phi_i(t)$の数値表が必要である。この不便を避けるためには、$\phi_i(t)$をtの多項式の形であらわせばよい。今tの原点を系列の中央に置くと、項数Nが奇数の時はtは$-\frac{N-1}{2}$, ……, $-2, -1, 0, 1, 2$, ……, $\frac{N-1}{2}$の値をとり、Nが偶数の時はtは$-\frac{N-1}{2}$, ……, $-1.5, -0.5, 0.5, 1.5$, ……, $\frac{N-1}{2}$の値をとる。従って、tの奇数次の積率$\frac{\sum t}{N}$, $\frac{\sum t^3}{N}$, $\frac{\sum t^5}{N}$, ……は0となる。ここで$\phi_i(t)$をtの多項式に展開すると

$$\left.\begin{aligned}
\phi_0(t) &= 1\\
\phi_1(t) &= t\\
\phi_2(t) &= t^2-\frac{N^2-1}{12}\\
\phi_3(t) &= t^3-\frac{3N^2-7}{20}t\\
\phi_4(t) &= t^4-\frac{3N^2-13}{14}t^2+\frac{3(N^2-1)(N^2-9)}{560}\\
\phi_5(t) &= t^5-\frac{5(N^2-7)}{18}t^3+\frac{15N^4-230N^2+407}{1,008}t\\
&\ \vdots
\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

これによって$\sum_t \phi_i(t)^2$を求めると

$$
\left.
\begin{aligned}
\sum\phi_0(t)^2 &= N\\
\sum\phi_1(t)^2 &= \frac{N(N^2-1)}{12}\\
\sum\phi_2(t)^2 &= \frac{N(N^2-1)(N^2-4)}{180}\\
\sum\phi_3(t)^2 &= \frac{N(N^2-1)(N^2-4)(N^2-9)}{2{,}800}\\
\sum\phi_4(t)^2 &= \frac{N(N^2-1)(N^2-4)(N^2-9)(N^2-16)}{44{,}100}\\
\sum\phi_5(t)^2 &= \frac{N(N^2-1)(N^2-4)(N^2-9)(N^2-16)(N^2-25)}{698{,}544}\\
&\vdots
\end{aligned}
\right\} \qquad (8)
$$

となる。

(7)(8)式を(2)式に代入すると、直交多項式の係数A_iを求める式は

$$
\left.
\begin{aligned}
A_0 &= \frac{\sum y}{N}\\
A_1 &= \frac{12}{N(N^2-1)}\sum ty\\
A_2 &= \frac{180}{N(N^2-1)(N^2-4)}\left(\sum t^2y-\frac{N^2-1}{12}\sum y\right)\\
A_3 &= \frac{2{,}800}{N(N^2-1)(N^2-4)(N^2-9)}\left(\sum t^3y-\frac{3N^2-7}{20}\sum ty\right)
\end{aligned}
\right\} \qquad (9)
$$

$$A_4=\frac{44{,}100\left\{\sum t^4y-\dfrac{3N^2-13}{14}\sum t^2y+\dfrac{3(N^2-1)(N^2-9)}{560}\sum y\right\}}{N(N^2-1)(N^2-4)(N^2-9)(N^2-16)}$$

$$A_5=\frac{698{,}544\left\{\sum t^5y-\dfrac{5(N^2-7)}{18}\sum t^3y+\dfrac{15N^4-230N^2+407}{1{,}008}\sum ty\right\}}{N(N^2-1)(N^2-4)(N^2-9)(N^2-16)(N^2-25)}$$

$$\vdots$$

となる。そして、直交多項式は

$$Y=A_0+A_1t+A_2\left(t^2-\frac{N^2-1}{12}\right)+A_3\left(t^3-\frac{3N^2-7}{20}t\right)+A_4\left\{t^4-\frac{3N^2-13}{14}t^2+\frac{3(N^2-1)(N^2-9)}{560}\right\}+\cdots\cdots \tag{10}$$

となり、これを t について解けば、t に関する普通の多項式

$$Y=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+a_4t^4+\cdots\cdots \tag{11}$$

が得られる。但し、この場合 t は、N が偶数の時は……, $-1.5, -0.5, 0.5, 1.5,$ …… の値をとることに注意すべきである。これを……, $-3, -1, 1, 3,$ …… の値をとる t' に関する式に直すには、(11)式に $t=\frac{t'}{2}$ を代入すればよい。

(9)式によって A_i ($i=0, 1, 2,$ ……) の値を求める場合、分子の係数 $\frac{N^2-1}{12}$, $\frac{3N^2-7}{20}$, ……の値は、当嵌めの都度計算する煩を避けるために、予め計算して表にしておくと便利である。附表Ｉはこの係数表である。又分母の値は(8)式によって直接計算してもよいが、(4)式より

$$\sum\phi_i(t)^2=\frac{\sum\phi_i'(t)^2}{\lambda_i^2}\qquad(i=1, 2, \cdots\cdots) \tag{12}$$

であるから、この関係を利用して、直交多項式表より求めた$\sum\phi_i'(t)^2$, λ_iの値を用いる方が便利である。附表Ⅱは$\sum\phi_i'(t)^2$の表であり、附表Ⅲはλ_iの表である。従って、$\sum y$, $\sum ty$, $\sum t^2y$, ……の値を計算すれば、附表Ⅰ—Ⅲを用いて、(9)(12)式によりA_iの値を求めることができる。尚$\sum y$, $\sum ty$, $\sum t^2y$, ……の計算は、第一表の$\phi_i'(t)$をt^iにかえて行えばよい。この場合も$y^{(+)}$にはiが偶数のt^iを乗じ、$y^{(-)}$にはiが奇数のt^iを乗ずる。

四、累加法による当嵌め

R. A. Fisher 博士は、計算の労を少くする方法として、累加法によるA_iの求め方を与えている[①]。しかし、それによる計算は比較的煩雑であり、それよりも、家本秀太郎博士の展開による累加法[②]を利用して、附表Ⅰ—Ⅲを用いて計算する方が簡単であると考えられる。次にそれを説明しよう。しかし、この場合は項数Nが奇数の場合と偶数の場合とを区別しなければならぬ。

(一) 項数が奇数の場合　系列の中央$t=0$の項を境として、tが正の部分と負の部分に分け、第二表の矢印の方向に逐次累積和を計算する。そこにおいて、S_0は資料値yの累積和であり、S_1はS_0の累積和、S_2はS_1の累積和、……をあらわす。そして、この添数の横の数字は累積値の位置を示し、Sの肩の$+-$は、tの正の部分の累積和か、それとも負の部分の累積和かをあらわすものとする。今

$$\left.\begin{aligned} S_0 &= S_{00}^{+} + S_{01}^{+} \\ D_1 &= S_{11}^{+} - S_{11}^{-} \\ S_2 &= S_{22}^{+} + S_{21}^{+} + S_{21}^{-} + S_{22}^{-} \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

$$D_3 = S_{32}^{+} - S_{32}^{-}$$

$$S_4 = S_{43}^{+} + S_{42}^{+} + S_{42}^{-} + S_{43}^{-}$$

$$D_5 = S_{53}^{+} - S_{53}^{-}$$

…

とすると、$\sum y$, $\sum ty$, $\sum t^2y$, ……の値は、次の式によって求められる。

$$\left.\begin{aligned}
\sum y &= S_0\\
\sum ty &= D_1\\
\sum t^2y &= S_2\\
\sum t^3y &= 6D_3 + D_1\\
\sum t^4y &= 12S_4 + S_2\\
\sum t^5y &= 120D_5 + 30D_3 + D_1\\
&\cdots
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

これを(9)式に代入すると（但し、これらの式の利用の便宜上、A_0以外の分母は直交多項式の自乗和であらわした。）

第二表　累積和計算表（項数が奇数の場合）

t	y	S_0	D_1	S_2	D_3	S_4	D_5
……		↓	↓	↓	↓	↓	↓
−3						S_{43}^{-}	S_{53}^{-}
−2				S_{22}^{-}	S_{32}^{-}	S_{42}^{-}	
−1			S_{11}^{-}	S_{21}^{-}			
0		S_{00}^{+}					
1		S_{01}^{+}	S_{11}^{+}	S_{21}^{+}			
2				S_{22}^{+}	S_{32}^{+}	S_{42}^{+}	
3						S_{43}^{+}	S_{53}^{+}
……		↑	↑	↑	↑	↑	↑

$$A_0=\frac{S_0}{N}$$

$$A_1=\frac{D_1}{\sum\phi_1(t)^2}$$

$$A_2=\frac{1}{\sum\phi_2(t)^2}\left(S_2-\frac{N^2-1}{12}S_0\right)$$

$$A_3=\frac{1}{\sum\phi_3(t)^2}\left\{6D_3-\left(\frac{3N^2-7}{20}-1\right)D_1\right\}$$

$$A_4=\frac{1}{\sum\phi_4(t)^2}\left\{12S_4-\left(\frac{3N^2-13}{14}-1\right)S_2+\frac{3(N^2-1)(N^2-9)}{560}S_0\right\}$$

$$A_5=\frac{1}{\sum\phi_5(t)^2}\left\{120D_5-\left(6\frac{5(N^2-7)}{18}-3\right)D_3+\left(\frac{15N^4-230N^2+407}{1,008}-\frac{5(N^2-7)}{18}+1\right)D_1\right\}$$

$$\cdots \qquad (15)$$

となる。

(二)　項数が偶数の場合　　tが正の部分と負の部分に分け、第三表の累積和を計算する。そして

$$S_0=S_{01}^{+}+S_{01}^{-}$$

$$D_1=S_{12}^{+}+S_{11}^{+}-S_{11}^{-}-S_{12}^{-}$$

$$\left.\begin{aligned} S_2&=S_{22}^{+}+S_{22}^{-}\\ D_3&=S_{33}^{+}+S_{32}^{+}-S_{32}^{-}-S_{33}^{-}\\ S_4&=S_{43}^{+}+S_{43}^{-}\\ D_5&=S_{54}^{+}+S_{53}^{+}-S_{53}^{-}-S_{54}^{-}\\ &\cdots \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

とすると、t が……, -1.5, -0.5, 0.5, 1.5, ……の値をとる場合の $\sum y$, $\sum ty$, $\sum t^2y$, ……の値は

$$\left.\begin{aligned} \sum y&=S_0\\ \sum ty&=\frac{D_1}{2}\\ \sum t^2y&=2S_2+\frac{S_0}{4}\\ \sum t^3y&=3D_3+\frac{D_1}{8}\\ \sum t^4y&=24S_4+5S_2+\frac{S_0}{16} \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

第三表　累積和計算表（項数が偶数の場合）

t	y	S_0	D_1	S_2	D_3	S_4	D_5
……		↓	↓	↓	↓	↓	↓
− 3.5							S_{54}^{-}
− 2.5					S_{33}^{-}	S_{43}^{-}	S_{53}^{-}
− 1.5			S_{12}^{-}	S_{22}^{-}	S_{32}^{-}		
− 0.5		S_{01}^{-}	S_{11}^{-}				
0.5		S_{01}^{+}	S_{11}^{+}				
1.5			S_{12}^{+}	S_{22}^{+}	S_{32}^{+}		
2.5					S_{33}^{+}	S_{43}^{+}	S_{53}^{+}
3.5							S_{54}^{+}
……		↑	↑	↑	↑	↑	↑

$$\sum t^5 y = 60D_5 + \frac{15}{2}D_3 + \frac{D_1}{32}$$

$$\vdots$$

で求められ、これを(9)式に代入すると（但し、A_0以外の分母は直交多項式の自乗和であらわした。）

$$\left.\begin{aligned}
A_0 &= \frac{S_0}{N}\\
A_1 &= \frac{1}{\sum\phi_{1(t)}{}^2}\,\frac{D_1}{2}\\
A_2 &= \frac{1}{\sum\phi_{2(t)}{}^2}\left\{2S_2 - \left(\frac{N^2-1}{12} - 0.25\right)S_0\right\}\\
A_3 &= \frac{1}{\sum\phi_{3(t)}{}^2}\left\{3D_3 - \left(\frac{3N^2-7}{20} - 0.25\right)\frac{D_1}{2}\right\}\\
A_4 &= \frac{1}{\sum\phi_{4(t)}{}^2}\left\{24S_4 - \left(\frac{3N^2-13}{14} - 2.5\right)2S_2 + \left(\frac{3(N^2-1)(N^2-9)}{560}\right.\right.\\
&\qquad\left.\left. - \frac{3N^2-13}{14}\,\frac{1}{4} + 0.062\,5\right)S_0\right\}\\
A_5 &= \frac{1}{\sum\phi_{5(t)}{}^2}\left\{60D_5 - \left(\frac{5(N^2-7)}{18} - 2.5\right)3D_3 + \left(\frac{15N^4-230N^2+407}{1{,}008}\right.\right.\\
&\qquad\left.\left. - \frac{5(N^2-7)}{18}\,\frac{1}{4} + 0.062\,5\right)\frac{D_1}{2}\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

第四表　昭和10～27年の我が国における写真機生産量に対する三次曲線当嵌め計算表

昭和	写真機生産量（千個）	S_0	D_1	S_2	D_3
10年	95	95	95	95	95
11	155	250	345	440	535
12	178	428	773	1,213	1,748
13	188	616	1,389	2,602	4,350
14	206	822	2,211	4,813	9,163
15	219	1,041	3,252	8,065	17,228
16	203	1,244	4,496	12,561	29,789
17	134	1,378	5,874	18,435	48,224
18	58	1,436	7,310		
19	30	944	6,852		
20	13	914	5,908	23,509	72,082
21	24	901	4,994	17,601	48,573
22	52	877	4,093	12,607	30,972
23	53	825	3,216	8,514	18,365
24	83	772	2,391	5,298	9,851
25	117	689	1,619	2,907	4,553
26	214	572	930	1,288	1,646
27	358	358	358	358	358

$$S_0 = 944 + 1{,}436 = 2{,}380$$

$$D_1 = 5{,}908 + 6{,}852 - 7{,}310 - 5{,}874 = -424$$

$$S_2 = 23{,}509 + 18{,}435 = 41{,}944$$

$$D_3 = 48{,}573 + 72{,}082 - 48{,}224 - 29{,}789 = 42{,}642$$

$$\frac{D_1}{2} = -212, \quad 2S_2 = 83{,}888, \quad 3D_3 = 127{,}926, \quad N = 18$$

$$\left\{2S_2 - \left(\frac{N^2-1}{12} - 0.25\right)S_0\right\} = 83{,}888 - (26.916\ 67 - 0.25)2{,}380 = 20{,}421.33$$

$$\left\{3D_3 - \left(\frac{3N^2-7}{20} - 0.25\right)\frac{D_1}{2}\right\} = 127{,}926 + (48.25 - 0.25)212 = 138{,}102$$

$$A_0 = \frac{2{,}380}{18} = 132.222$$

$$A_1 = -\frac{212}{1{,}938}2^2 = -0.437\ 564$$

$$A_2 = \frac{20{,}421.33}{23{,}256}\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 1.975\ 748$$

$$A_3 = \frac{138{,}102}{23{,}256}\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 0.659\ 815\ 3$$

故に

$$Y = 132.222 - 0.437\ 6t + 1.975\ 75(t^2 - 26.916\ 7) + 0.659\ 815(t^3 - 48.25t)$$

t に関する普通の多項式に直すと

$$Y = 79.04 - 32.274t + 1.975\ 8t^2 + 0.659\ 82t^3$$

又 $t'(\cdots\cdots,\ -3,\ -1,\ 1,\ 3,\ \cdots\cdots)$ に関する多項式に直すと

$$Y = 79.04 - 16.137t' + 0.493\ 9t'^2 + 0.082\ 48t'^3$$

となる。

かくてA_iの値は、Nが奇数の時は⒀⒂式により、Nが偶数の時は⒃⒅式により、附表I―IIIを用いて容易に計算することができる。第四表は我が国における写真機生産量の資料の三次傾向線を、累加法で当嵌めた場合の計算表である。

① Fisher, R. A.: Statistical Methods for Research Workers, 11th ed., 1950, pp. 151-3. 遠藤健児、鍋谷清治共訳、研究者の為の統計的方法、昭和二十七年、一三四―六頁、尚 Smith and Duncan: ibid., pp. 608-612 参照。

② 家本秀太郎、累加法に依る新しい有理整函数の当嵌法とその公式の表式化、国民経済雑誌、第六四巻、第一号参照。

五、傾向値の計算

最後に、当嵌められた直交多項式より、各時点の傾向値を求める方法を説明しよう。

先ず、直交多項式$\phi_i(t)$の数値表を用いる時は、各tに対する$\phi'_i(t)$の値を⑹式に代入すればよいのであるが、実際の計算は、第五表のように、先ず$t \geqq 0$に対する$\phi'_i(t)$の値を用いて$A_i'\phi_i'(t)$（$i=1, 2, \ldots\ldots$）を計算し、$t \geqq 0$の傾向値を求める時は、A_0に逐次$A_i'\phi_i'(t)$を加え、$t<0$の傾向値を求める時は、A_0にiが偶数の$A_i'\phi_i'(t)$を加え、iが奇数の$A_i'\phi_i'(t)$を引けばよい。これによって一次、二次、三次、……の傾向値が順次得られる。第五表は、写真機生産量の三次傾向値をこの方法で求めた場合の計算表である。

次に、tであらわされた直交多項式⑽による時は、i次式は第i階差が一定であることより、階差法で求めることができる。今階差値の計算の容易な時点で、⑽式及びその第一、第二、第三、……階差を求めると次の如く

第五表　昭和10〜27年の我が国における写真機生産量の三次傾向値の計算表

t	$\phi'_1(t)$	$A'_1\phi'_1(t)$ (1)	$\phi'_2(t)$	$A'_2\phi'_2(t)$ (2)	A_3'	$A'_3\phi'_3(t)$ (3)	昭和	三次傾向値 $A_0-(1)+(2)-(3)$	三次傾向値 $A_0+(1)+(2)+(3)$	昭和
8.5	17	− 3.72	68	89.57	68	134.60	10年	90.9	352.7	27年
7.5	15	− 3.29	44	57.96	20	39.59	11	153.9	226.5	26
6.5	13	− 2.85	23	30.30	− 13	− 25.73	12	191.1	133.9	25
5.5	11	− 2.41	5	6.59	− 33	− 65.32	13	206.5	71.1	24
4.5	9	− 1.97	− 10	− 13.17	− 42	− 83.14	14	204.2	33.9	23
3.5	7	− 1.53	− 22	− 28.98	− 42	− 83.14	15	187.9	18.6	22
2.5	5	− 1.10	− 31	− 40.83	− 35	− 69.28	16	161.8	21.0	21
1.5	3	− 0.66	− 37	− 48.74	− 23	− 45.53	17	129,7	37.3	20
0.5	1	− 0.22	− 40	− 52.69	− 8	− 15.84	18	95.6	63.5	19

但し　$A_0=132.22$, $A_1'=-0.219$, $A_2'=1.317\ 2$, $A_3'=1.979\ 45$

である。但し、tがとる値が異るために、項数が奇数の場合と偶数の場合とを区別しなければならない。項数が奇数の時は、$t=0$ において

$$Y_0=A_0-\frac{N^2-1}{12}A_2+\frac{3(N^2-1)(N^2-9)}{560}A_4+\cdots\cdots$$

$$\varDelta Y_0=A_1+A_2-A_3\left(\frac{3N^2-7}{20}-1\right)-A_4\left(\frac{3N^2-13}{14}-1\right)+A_5\left\{\frac{15N^4-230N^2+407}{1{,}008}-\frac{5(N^2-7)}{18}+1\right\}+\cdots\cdots$$

$$\varDelta^2 Y_0=2A_2+6A_3-2A_4\left(\frac{3N^2-13}{14}-7\right)-6A_5\left\{\frac{5(N^2-7)}{18}-5\right\}+\cdots\cdots$$

$$\left.\begin{aligned}
&\varDelta^3 Y_0 = 6A_3 + 36A_4 - 6A_5\left\{\frac{5(N^2-7)}{18} - 25\right\} + \cdots\cdots \\
&\varDelta^4 Y_0 = 24A_4 + 240A_5 + \cdots\cdots \\
&\varDelta^5 Y_0 = 120A_5 + \cdots\cdots \\
&\quad\vdots
\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

であり、項数が偶数の時は、$t=-0.5$ において

$$\left.\begin{aligned}
&Y_{-0.5} = A_0 - \frac{A_1}{2} - A_2\left(\frac{N^2-1}{12} - 0.25\right) + \frac{A_3}{2}\left(\frac{3N^2-7}{20} - 0.25\right) + A_4\left\{\frac{3(N^2-1)(N^3-9)}{560}\right. \\
&\qquad \left. - \frac{3N^2-13}{14}\,\frac{1}{4} + 0.0625\right\} - \frac{A_5}{2}\left\{\frac{15N^4-230N^2+407}{1{,}008} - \frac{5(N^2-7)}{18}\,\frac{1}{4} + 0.062\,5\right\} + \cdots\cdots \\
&\varDelta Y_{-0.5} = A_1 - A_3\left(\frac{3N^2-7}{20} - 0.25\right) + A_5\left\{\frac{15N^4-230N^2+407}{1{,}008} - \frac{5(N^2-7)}{18}\,\frac{1}{4} + 0.062\,5\right\} + \cdots\cdots \\
&\varDelta^2 Y_{-0.5} = 2A_2 + 3A_3 - 2A_4\left(\frac{3N^2-13}{14} - 2.5\right) - 3A_5\left\{\frac{5(N^2-7)}{18} - 2.5\right\} + \cdots\cdots \\
&\varDelta^3 Y_{-0.5} = 6A_3 + 24A_4 - 6A_5\left\{\frac{5(N^2-7)}{18} - 12.5\right\} + \cdots\cdots \\
&\varDelta^4 Y_{-.05} = 24A_4 + 180A_5 + \cdots\cdots \\
&\varDelta^5 Y_{-0.5} = 120A_5 + \cdots\cdots \\
&\quad\vdots
\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

となる。これらの式によって傾向値を求める場合、二次傾向値の場合はA_2の項まで、三次傾向値の場合はA_3の項

まで、等、必要な次数の係数を含む項までとって、階差値を計算すればよい。この方法によって写真機生産量の三次傾向値を計算すると第六表の如くである。しかし、(19)又は(20)式による時は、一次、二次、三次、……の傾向値を順次得ることはできず、それぞれあらためて計算しなければならない。①

第六表　昭和10〜27年の我が国における写真機生産量の三次傾向値の計算表

t	$\varDelta^3 Y$	$\varDelta^2 Y$	$\varDelta Y$	Y	昭和
−8.5		−25.7402	62.964	90.91	10年
−7.5		−21.7813	37.224	153.87	11
−6.5		−17.8224	15.443	191.09	12
−5.5		−13.8635	−2.379	206.53	13
−4,5		−9.9046	−16.243	204.15	14
−3.5		−5.9457	−26.148	187.91	15
−2.5		−1.9868	−32.094	161.76	16
−1.5		1.9721	−34.081	129.67	17
−0.5	3.95889	5.9310	−32.109	95.59	18
0.5		9.8899	−26.178	63.48	19
1.5		13.8488	−16.288	37.30	20
2.5		17.8077	−2.439	21.01	21
3.5		21.7666	15.369	18.57	22
4.5		25.7255	37.136	33.94	23
5.5		29.6844	62.862	71.08	24
6.5		33.6433	92.546	133.94	25
7.5			126.189	226.49	26
8.5				352.68	27

$$Y_{-0.5}=132.222+\frac{0.4376}{2}-1.97575(26.9167-0.25)$$

$$+\frac{0.659815}{2}(48.25-0.25)=95.587$$

$$\varDelta Y_{-0.5}=-0.4376-0.65982(48.25-0.25)=-32.1090$$

$$\varDelta^2 Y_{-0.5}=2\times1.97575+3\times0.65982=5.93096$$

$$\varDelta^3 Y_{-0\cdot5}=6\times0.659815=3.958890$$

① 直交多項式による傾向値は、一次の傾向値に二次の項の値、三次の項の値、……が加って構成されているために、これらの傾向値を別別に階差法で求めると、一次、二次、三次、……の傾向値を順次得ることができる。その場合必要な式は、(19)又は(20)式の各項から得られる。

六、むすび

以上四項にわたって、直交多項式の当嵌め方法を説明してきたのであるが、直交多項式 $\phi_i(t)$ による方法は、特別の数値表を必要とするため一般性がなく、又項数が多い時は $\phi_i(t)$ の値が大きくなり、乗法計算が面倒である。又 t の値による時も後者のことがいえる。それに対して、累加法は乗法計算を加法計算で可能にし、我が国では算盤の普及により加法計算が容易であるから、直交多項式の当嵌めは累加法によるのが便利であろう。

後記　附表1は二度検算を行ったが、尚誤りを侵しているかも知れず、又誤記、誤植の恐れもあるため、誤りをお気付きの方は御指摘下されば仕合せである。

附表 I

N	$\frac{N^2-1}{12}$	$\frac{3N^2-7}{20}$	$\frac{3N^2-13}{14}$	$\frac{3(N^2-1)(N^2-9)}{560}$	$\frac{5(N^2-7)}{18}$	$\frac{15N^4-230N^2+407}{1{,}008}$
6	2.916 667	5.05	6.785 714	5.062 500	8.055 556	11.475 198
7	4.000 000	7.00	9.571 429	10.285 714	11.666 667	24.952 381
8	5.250 000	9.25	12.785 714	18.562 500	15.833 333	46.752 976
9	6.666 667	11.80	16.428 571	30.857 143	20.555 556	79.555 556
10	8.250 000	14.65	20.500 000	48.262 500	25.833 333	126.395 833
11	10.000 000	17.80	25.000 000	72.000 000	31.666 667	190.666 667
12	11.916 667	21.25	29.928 571	103.419 643	38.055 556	276.118 056
13	14.000 000	25.00	35.285 714	144.000 000	45.000 000	386.857 143
14	16.250 000	29.05	41.071 429	195.348 214	52.500 000	527.348 214
15	18.666 667	33.40	47.285 714	259.200 000	60.555 556	702.412 698
16	21.250 000	38.05	53.928 571	337.419 643	69.166 667	917.229 167
17	24.000 000	43.00	61.000 000	432.000 000	78.333 333	1,177.333 333
18	26.916 667	48.25	68.500 000	545.062 500	88.055 556	1,488.618 056
19	30.000 000	53.80	76.428 571	678.857 143	98.333 333	1,857.333 333
20	33.250 000	59.65	84.785 714	835.762 500	109.166 667	2,290.086 310
21	36.666 667	65.80	93.571 429	1,018.285 714	120.555 556	2,793.841 270
22	40.250 000	72.25	102.785 714	1,229.062 500	132.500 000	3,375.919 643
23	44.000 000	79.00	112.428 571	1,470.857 143	145.000 000	4,044.000 000
24	47.916 667	86.05	122.500 000	1,746.562 500	158.055 556	4,806.118 056
25	52.000 000	93.40	133.000 000	2,059.200 000	171.666 667	5,670.666 667

26	56.250 000	101.05	143.928 571	2,411.919 643	185.833 333	6,646.395 833
27	60.666 667	109.00	155.285 714	2,808.000 000	200.555 556	7,742.412 698
28	65.250 000	117.25	167.071 429	3,250.848 214	215.833 333	8,968.181 548
29	70.000 000	125.80	179.285 714	3,744.000 000	231.666 667	10,333.523 810
30	74.916 667	134.65	191.928 571	4,291.119 643	248.055 556	11,848.618 056
31	80.000 000	143.80	205.000 000	4,896.000 000	265.000 000	13,524.000 000
32	85.250 000	153.25	218.500 000	5,562.562 500	282.500 000	15,370.562 500
33	90.666 667	163.00	232.428 571	6,294.857 143	300.555 556	17,399.555 556
34	96.250 000	173.05	246.785 714	7,097.062 500	319.166 667	19,622.586 310
35	102.000 000	183.40	261.571 429	7,973.485 714	338.333 333	22,051.619 048
36	107.916 667	194.05	276.785 714	8,928.562 500	358.055 556	24,698.975 198
37	114.000 000	205.00	292.428 571	9,966.857 143	378.333 333	27,577.333 333
38	120.250 000	216.25	308.500 000	11,093.062 500	399.166 667	30,699.729 167
39	126.666 667	227.80	325.000 000	12,312.000 000	420.555 556	34,079.555 556
40	133.250 000	239.65	341.928 571	13,628.619 643	442.500 000	37,730.562 500
41	140.000 000	251.80	359.285 714	15,048.000 000	465.000 000	41,666.857 143
42	146.916 667	264.25	377.071 429	16,575.348 214	488.055 556	45,902.903 770
43	154.000 000	277.00	395.285 714	18,216.000 000	511.666 667	50,453.523 810
44	161.250 000	290.05	413.928 571	19,975.419 643	535.833 333	55,333.895 833
45	168.666 667	303.40	433.000 000	21,859.200 000	560.555 556	60,559.555 556
46	176.250 000	317.05	452.500 000	23,873.062 500	585.833 333	66,146.395 833
47	184.000 000	331.00	472.428 571	26,022.857 143	611.666 667	72,110.666 667
48	191.916 667	345.25	492.785 714	28,314.562 500	638.055 556	78,468.975 198
49	200.000 000	359.80	513.571 429	30,754.285 714	665.000 000	85,238.285 714
50	208.250 000	374.65	534.785 714	33,348.262 500	692.500 000	92,435.919 643

附 表 II

N	$\sum \phi'_1(t)^2$	$\sum \phi'_2(t)^2$	$\sum \phi'_3(t)^2$	$\sum \phi'_4(t)^2$	$\sum \phi'_5(t)^2$
6	70	84	180	28	252
7	28	84	6	154	84
8	168	168	264	616	2,184
9	60	2,772	990	2,002	468
10	330	132	8,580	2,860	780
11	110	858	4,290	286	156
12	572	12,012	5,148	8,008	15,912
13	182	2,002	572	68,068	6,188
14	910	728	97,240	136,136	235,144
15	280	37,128	39,780	6,466,460	10,581,480
16	1,360	5,712	1,007,760	470,288	201,552
17	408	7,752	3,876	16,796	100,776
18	1,938	23,256	23,256	28,424	6,953,544
19	570	13,566	213,180	2,288,132	89,148
20	2,660	17,556	4,903,140	22,881,320	31,201,800
21	770	201,894	432,630	5,720,330	121,687,020
22	3,542	7,084	96,140	8,748,740	40,562,340
23	1,012	35,420	32,890	13,123,110	340,860
24	4,600	394,680	17,760,600	394,680	177,928,920
25	1,300	53,820	1,480,050	14,307,150	7,803,900
26	5,850	16,380	7,803,900	40,060,020	48,384,180
27	1,638	712,530	101,790	56,448,210	2,032,135,560

附 表 III

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	N
2	3/2	5/3	7/12	21/10	6
1	1	1/6	7/12	7/20	7
2	1	2/3	7/12	7/10	8
1	3	5/6	7/12	3/20	9
2	1/2	5/3	5/12	1/10	10
1	1	5/6	1/12	1/40	11
2	3	2/3	7/24	3/20	12
1	1	1/6	7/12	7/120	13
2	1/2	5/3	7/12	7/30	14
1	3	5/6	35/12	21/20	15
2	1	10/3	7/12	1/10	16
1	1	1/6	1/12	1/20	17
2	3/2	1/3	1/12	3/10	18
1	1	5/6	7/12	1/40	19
2	1	10/3	35/24	7/20	20
1	3	5/6	7/12	21/40	21
2	1/2	1/3	7/12	7/30	22
1	1	1/6	7/12	1/60	23
2	3	10/3	1/12	3/10	24
1	1	5/6	5/12	1/20	25
2	1/2	5/3	7/12	1/10	26
1	3	1/6	7/12	21/40	27

28	7,308	95,004	2,103,660	19,634,160	1,354,757,040	2	1	2/3	7/24	7/20	28
29	2,030	113,274	4,207,320	107,987,880	500,671,080	1	1	5/6	7/12	7/40	29
30	8,990	302,064	21,360,240	3,671,587,920	2,145,733,200	2	3/2	5/3	35/12	3/10	30
31	2,480	158,224	6,724,520	4,034,712	9,536,592	1	1	5/6	1/12	1/60	31
32	10,912	185,504	5,379,616	5,379,616	54,285,216	2	1	2/3	1/12	1/30	32
33	2,992	1,947,792	417,384	348,330,136	1,547,128,656	1	3	1/6	7/12	3/20	33
34	13,090	62,832	51,477,360	456,432,592	46,929,569,232	2	1/2	5/3	7/12	7/10	34
35	3,570	290,598	15,775,320	14,834,059,240	4,045,652,520	1	1	5/6	35/12	7/40	35
36	15,540	3,011,652	307,618,740	191,407,216	199,046,103,984	2	3	10/3	7/24	21/20	36
37	4,218	383,838	932,178	980,961,982	152,877,192	1	1	1/6	7/12	1/40	37
38	18,278	109,668	4,496,388	25,479,532	3,286,859,628	2	1/2	1/3	1/12	1/10	38
39	4,940	4,496,388	33,722,910	32,224,114	9,860,578,884	1	3	5/6	1/12	3/20	39
40	21,320	567,112	644,482,280	49,625,135,560	644,482,280	2	1	10/3	35/12	1/30	40
41	5,740	641,732	47,900,710	2,481,256,778	10,376,164,708	1	1	5/6	7/12	7/60	41
42	24,682	1,629,012	9,075,924	3,084,805,724	4,389,117,671,484	2	3/2	1/3	7/12	21/10	42
43	6,622	814,506	2,676,234	3,815,417,606	39,541,600,644	1	1	1/6	7/12	7/40	43
44	28,380	913,836	1,257,829,980	1,173,974,648	4,162,273,752	2	1	10/3	7/24	1/20	44
45	7,590	9,203,634	92,036,340	2,934,936,620	12,006,558,900	1	3	5/6	5/12	3/40	45
46	32,430	285,384	429,502,920	143,167,640	27,214,866,840	2	1/2	5/3	1/12	1/10	46
47	8,648	1,271,256	4,994,220	8,518,474,580	8,629,104,120	1	1	1/6	7/12	1/20	47
48	36,848	12,712,560	92,620,080	10,301,411,120	19,208,385,771,120	2	3	2/3	7/12	21/10	48
49	9,800	1,566,040	167,230,700	12,408,517,940	74,451,107,640	1	1	5/6	7/12	7/60	49
50	41,650	433,160	770,715,400	372,255,538,200	372,255,538,200	2	1/2	5/3	35/12	7/30	50

統計科学研究会編，新編統計数値表，昭和27年，より作成